Masse de Jeans

Préparation Nuage stellaire au repos

On considère un nuage interstellaire d'hydrogène de masse volumique ρ soumis à sa propre gravitation. On supposera le problème à symétrie cylindrique.

1. Rappelez la forme de la force de gravitation entre deux corps de masse m_1 et m_2, puis la forme de la force de Coulomb entre deux charges q_1 et q_2, puis le théorème de Gauss pour l'électrostatique et en déduire par analogie le théorème de Gauss pour la gravitation. En déduire l'équivalent de l'équation de Maxwell Gauss pour la gravitation.
2. Montrez qu'en électrostatique, le champ électrique dérive d'un champ scalaire. Par analogie, déterminez l'équation vérifiée par le potentiel gravitationnel Ψ.
3. On traite le gaz du nuage comme un fluide parfait compressible. Etablir l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler.
4. On cherche une solution stationnaire sous la forme ρ_0, p_0 uniformes et constants, Ψ_0 et $\overrightarrow{v_0} = r\Omega\overrightarrow{u_\theta}$ constants. Déterminez Ω et Ψ_0. A quoi correspond ce mouvement ?

Formulaire : en coordonnées sphériques, $\Delta f(r) = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r f\right)$, $div\left(A\overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{grad}A + Adiv\overrightarrow{B}$

Suite Effet d'une perturbation

On imagine que le nuage précédemment dans un état stationnaire est soumis à une perturbation infinitésimale.

1. On cherche la réponse au premier ordre du système : $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $P = P_0 + P_1$ etc. Exprimez les équations vérifiées par les termes d'ordre 1. On supposera $\overrightarrow{v_1} = v_1(r,z)\overrightarrow{u_z}$ et l'ensemble des variables indépendantes de θ.
2. On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes $\rho_1(r,z,t) = \tilde{\rho_1}e^{-i(k_r r + k_z z - \omega t)}$ etc. Justifiez cette forme et déterminez les équations vérifiées par $\tilde{\rho_1}$, $\tilde{P_1}$, $\tilde{\Psi_1}$ et $\tilde{v_1}$.
3. On admet la relation thermodynamque $P_1 = c_s^2\rho_1$, où c_s est la vitesse de propagation des ondes sonores dans le nuage et on s'intéresse aux perturbations longitudinales ($k_r = 0$). Déterminez la relation de dispersion.
4. En déduire que, soumis à des excitations de grandes longueurs d'onde, le nuage est instable et fini par s'effondrer sur lui même. En déduire l'expression de la masse des étoiles dans leur première partie de vie.

Evaluation

Connaissance du cours (/10)

- Electrostatique et gravitation
- Equation de mécanique des fluides

Calcul (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

Sens physique (contextualisation, analyse) (/4)

Comportement (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

Solution

1. $\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} = q_2\overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r})$ et $\overrightarrow{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} = m_2\overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{r})$ donc $\oiint \overrightarrow{g}.\overrightarrow{dS} = -4\pi G M_{int}$ et $div\,\overrightarrow{g} = -4\pi G\rho$.
2. $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \rightarrow \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \rightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Ici, $\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{grad}\Psi$ et $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$
3. $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\overrightarrow{v}\right) = 0$ et $\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \overrightarrow{g} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \overrightarrow{grad}\Psi$
4. Euler avec $\overrightarrow{v} = r\Omega\overrightarrow{u_\theta}$: $\Omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\Omega\overrightarrow{u_\theta}\right) = -r\Omega^2\overrightarrow{u_r} = -\frac{\partial}{\partial r}\Psi\overrightarrow{u_r}$ donc $\Psi = \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + cste$ et avec $\Delta\Psi = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\Psi\right) = \frac{1}{r}\partial_r\left(r^2\Omega^2\right) = 2\Omega^2$, la relation de Poisson donne $\Omega^2 = 2\pi G\rho_0$. Le nuage tourne alors autour de son axe à vitesse angulaire constante.
5. A l'ordre 1,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0 div\left(\overrightarrow{v_1}\right) + \overrightarrow{v_0}.\overrightarrow{grad}\left(\rho_1\right) &= 0\\
&= \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\partial_z v_1 + \frac{v_0}{r}\partial_\theta\rho_1\\
\partial_t\overrightarrow{v_1} + \left(\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v_0} + \left(\overrightarrow{v_0}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v_1} &= -\frac{1}{\rho_0}\overrightarrow{grad}P_1 - \overrightarrow{grad}\Psi_1\\
&= \partial_t\overrightarrow{v_1} + v_1.\partial_z\overrightarrow{v_0} + v_0.\partial_\theta\overrightarrow{v_1}\\
\Delta\Psi_1 &= 4\pi G\rho_1
\end{aligned}$$

6. La *linéarité* des équations permet de chercher les solutions sous forme d'onde plane. La propriété de bijection de la transformation de Fourier assure que toute solution peut être décomposée en un *superposition* d'ondes planes.

$$\begin{aligned}
i\omega\tilde{\rho_1} - ik_z\rho_0\tilde{v_1} &= 0\\
i\omega\tilde{v_1} &= i\frac{1}{\rho_0}k_z\tilde{P_1} + ik_z\tilde{\Psi}_1\\
-k_z^2\tilde{\Psi}_1 &= 4\pi G\tilde{\rho_1}\\
\tilde{P_1} &= c_s^2\tilde{\rho_1}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\omega\tilde{\rho_1} - k_z\rho_0\tilde{v_1} &= 0\\
\omega\tilde{v_1} &= \left(\frac{1}{\rho_0}k_z c_s^2 - \frac{4\pi G}{k_z}\right)\tilde{\rho_1}\\
-k_z^2\tilde{\Psi}_1 &= 4\pi G\tilde{\rho_1}\\
\tilde{P_1} &= c_s^2\tilde{\rho_1}
\end{aligned}$$

soit, en remplaçant les deux dernières équations dans les deux premières,

1. L'ensemble $\left\{\tilde{v_1}, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\rho_1}, \tilde{P_1}\right\} = \{0,0,0,0\}$ est clairement solution. Pour avoir une solution autre que triviale, il faut que le système admette une solution non unique, ie que son déterminant soit nul. On doit donc avoir

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \omega & -k_z\rho_0 \\ \frac{1}{\rho_0}k_z c_s^2 - \frac{4\pi G}{k_z} & -\omega \end{vmatrix} &= 0\\
\omega^2 &= k_z^2 c_s^2 - 4\pi\rho_0 G\\
&= c_s^2\left(k_z^2 - k_J^2\right)
\end{aligned}$$

avec $k_J = \sqrt{\frac{4\pi\rho_0 G}{c_s^2}}$.

2. *Pour $k_z < k_J$, la pulsation est imaginaire pure et correspond à un effondrement du nuage.* La longueur caractéristique est donnée par la longueur de Jeans : $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$. Chaque zone correspond à une masse dite *masse de Jeans* : $\frac{4}{3}\pi\lambda_J^3\rho_0 = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi^5}{\rho_0 G^3}\right)^{1/2}c_s^3$.