Réflexion sur un milieu diélectrique

On envoie une onde électromagnique monochromatique de pulsation ω sur un dioptre séparant deux milieux diélectrique d'indices $n_1 = 1.5$ et $n_2 = 2.5$. On note $\overrightarrow{k_i}$, $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ les vecteurs d'onde des ondes incidentes, réfléchies et transmises et on note θ_i l'angle formé entre le vecteur $\overrightarrow{k_i}$ et la normale au dioptre.

1. Rappelez les lois de Descartes ainsi que les équations de raccordement des champs électriques et magnétiques au passage d'un dioptre.
2. Cas transverse magnétique : on considère que le champ magnétique incident est perpendiculaire au plan d'incidence. Exprimez les coefficients de réflexion en amplitude $r_{12}^{TM} = \underline{E_r}/\underline{E_i}$ et de transmission en amplitude $t_{12}^{TM} = \underline{E_t}/\underline{E_i}$ et montrez que

$$r_{12}^{TM} = \frac{n_2 cos\theta_i - n_1 cos\theta_t}{n_1 cos\theta_t + n_2 cos\theta_i} \qquad t_{12}^{TM} = \frac{2n_1 cos\theta_i}{n_1 cos\theta_t + n_2 cos\theta_i}$$

3. Montrez que pour un certain angle d'incidence φ, le coefficient de réflexion r_{12}^{TM} est nul. On pourra utiliser la relation $\frac{1}{\cos^2} = 1 - \tan^2$.
4. Exprimez les coefficients de réflexion et de transmission en intensité en fonction des coefficients en amplitude.

Réflexion sur une lame diélectrique

On considère à présent que le second milieu est une lame mince d'épaisseur e_2. On suppose l'onde polarisée linéairement avec le champ électrique suivant $\overrightarrow{u_y}$ (cas transverse électrique) et on admet les relations suivantes

$$r_{12}^{TE} = \frac{n_1 cos\theta_i - n_2 cos\theta_t}{n_1 cos\theta_i + n_2 cos\theta_t} \qquad t_{12}^{TE} = \frac{2n_1 cos\theta_i}{n_1 cos\theta_i + n_2 cos\theta_r}$$

1. Exprimez la différence de marche entre deux rayons réfléchis successifs.
2. Quelle est la plus petite valeur de e_2 pour laquelle ces deux rayons interfèrent-ils constructivement ? Exprimez cette condition lorsque $\theta_i = \varphi$ (on pourra utiliser la relation $\sin^2\varphi = \frac{\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}$). On supposera cette hypothèse vérifiée par la suite.
3. On considère à présent une succession de N lames d'épaisseur e_1 et d'indice n_1 et de N lames d'épaisseur e_2 et d'indice n_2.
   (a) Quelle est la plus petite valeur de e_1 pour laquelle tous les rayons réfléchis interfèrent-ils constructivement ?
   (b) Que vaut le coefficient de réflexion total r^{TM} du système pour une onde transervse magnétique ?
   (c) Que vaut alors le coefficient de réflexion total r^{TE} du système pour une onde transervse électrique, en ne considérant que les rayons réfléchis une fois ? Commentez.

Evaluation

Connaissance du cours (/10)

- Equations de Maxwell (énoncé, raccordement)
- Structure des ondes et polarisation
- Interférences (superposition, déphasage)

Calcul (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

Sens physique (contextualisation, analyse) (/4)

Comportement (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

Solution

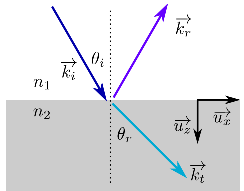


Fig 1

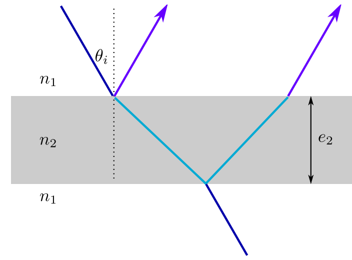


Fig 2

Partie 1

1. Rappel de cours
2. En alignant le champ magnétique incident $\overrightarrow{B_i}$ dans la direction $\overrightarrow{u_y}$, on obtient ainsi les projections suivantes :

$$\overrightarrow{E_i} = E_i \begin{pmatrix} \cos\theta_i \\ 0 \\ -\sin\theta_i \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{E_r} = E_r \begin{pmatrix} -\cos\theta_i \\ 0 \\ -\sin\theta_i \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{E_t} = E_t \begin{pmatrix} \cos\theta_t \\ 0 \\ -\sin\theta_t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_i} = B_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_r} = B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_t} = B_t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, les relations de structure imposent $B = \frac{n}{c}E$. Les équations de Maxwell, en absence de courants surfaciques, entrainent la continuité du champ magnétique et de la composante tangentielle du champ électrique.

Continuité de $\overrightarrow{B}$

$$B_i + B_r = B_t$$
$$\Leftrightarrow n_1 E_i + n_1 E_r = n_2 E_t$$
$$\Leftrightarrow n_1(1 + r_{12}^{TM}) = n_2 t_{12}^{TM}$$

Continuité de $\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{n}$

$$E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_i = E_t \cos\theta_t$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta_i (1 - r_{12}^{TM}) = t_{12}^{TM} \cos\theta_t$$

L'expression des coefficients de transmission et de réflexion est alors obtenue par résolution du système de Cramer

Coefficient de réflexion

$$r_{12}^{TM} = \frac{\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ cos\theta_i & cos\theta_t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -n_1 & n_2 \\ cos\theta_i & cos\theta_t \end{vmatrix}} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i}$$

Coefficient de transmission

$$t_{12}^{TM} = \frac{\begin{vmatrix} -n_1 & n_1 \\ cos\theta_i & cos\theta_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -n_1 & n_2 \\ cos\theta_i & cos\theta_t \end{vmatrix}} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i}$$

3. Pour annuler r_{12}^{TM}, on doit avoir $n_2 \cos\theta_i = n_1 \cos\theta_t \Rightarrow n_2^2 \cos^2\theta_i = n_1^2 \left(1 - \sin^2\theta_t\right)$. D'autre part, les lois de Snell Descartes imposent $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$ et on a donc $n_1^2 \left(1 - \sin^2\theta_t\right) = n_1^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_i\right)$. On en déduit $\frac{n_1^2}{n_2^2} \left(\frac{1}{\cos^2\theta_i} - \frac{n_1^2}{n_2^2} \tan^2\theta_i\right) = 1$ et, avec $\frac{1}{\cos^2} = 1 - \tan^2$, on obtient $\tan^2\theta_i = \frac{n_2^2}{n_1^2}$.
4. On définit les cofficients de réflexions et de transmission en énergie par

$$R = \frac{\langle \overrightarrow{\pi_r} \overrightarrow{u_r} \rangle}{\langle \overrightarrow{\pi_i} \overrightarrow{u_i} \rangle} \qquad T = \frac{\langle \overrightarrow{\pi_t} \overrightarrow{u_t} \rangle}{\langle \overrightarrow{\pi_i} \overrightarrow{u_i} \rangle}$$

avec $\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$.

Par ailleurs, la relation de structure impose $\overrightarrow{\pi} \parallel \overrightarrow{u} = \overrightarrow{k}/k$ et $\overrightarrow{B} = n \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E}}{c}$. Enfin, avec la notation complexe $\overrightarrow{E} = Re\left(\overrightarrow{\underline{E}} \exp\left(i\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}\right)\right)\right)$, on peut écrire

$$\langle \vec{\pi}.\vec{u} \rangle = \frac{n}{\mu_0 c}\left\langle E^2 \right\rangle = \frac{n}{\mu_0 c}\left\langle \frac{\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{i\omega t}+\underline{\vec{E}}(\vec{r})^* e^{-i\omega t}}{2} \times \frac{\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{i\omega t}+\underline{\vec{E}}(\vec{r})^* e^{-i\omega t}}{2} \right\rangle = \frac{n}{2\mu_0 c}\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}*}$$

On a par définition $\underline{\vec{E}_r} = r\underline{\vec{E}_i}$ et $\underline{\vec{E}_t} = t\underline{\vec{E}_i}$. On en déduit

Onde réfléchie

$$R = rr^* = r^2$$

Onde transmise

$$T = \frac{n_2}{n_1}tt^* = \frac{n_2}{n_1}t^2$$

Partie 2

1. $\delta = n_2\,[OB] - n_1\,[OC]$ avec

   $[OC] = 2O'A\sin\theta_i = 2e_2\tan\theta_r\sin\theta_i$

   $[OB] = 2OA = 2\frac{e_2}{\cos\theta_r}$

   On a donc $\delta = 2\frac{n_2 e_2}{\cos\theta_r} - 2n_1 e_2 \frac{\sin\theta_r}{\cos\theta_r}\sin\theta_i = 2\frac{n_2 e_2}{\cos\theta_r}\left(1-\sin^2\theta_r\right) = 2n_2 e_2\cos\theta_r$.
2. Les rayons interfèrent constructivement si leur déphasage est multiple de 2π. En plus de la différence de marche, il faut prendre en compte la réflexion sur un dioptre $n_2 > n_1$ qui déphase de π le faisceau. On a donc finalement la condition

   $$\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \pi = 2p\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}2n_2 e_2\cos\theta_r = \pi\,(2p-1)$$

   Pour que e_2 soit minimal, on prend $p=1$ et avec $\cos\theta_r = \sqrt{1-\sin^2\theta_r} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{n_2^2}{n_1^2+n_2^2}} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}$, on trouve la condition

   $$e_2 = \frac{\lambda}{4}\frac{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}{n_2^2}$$
3. Application au cube polariseur

   (a) La condition sur e_2 assure l'intéférence constructive sur les lames 2. Avec le même raisonnement, on trouve la condition d'interférence constructive sur les lames 1 :

   $$e_1 = \frac{\lambda}{4}\frac{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}{n_1^2}$$

   (b) L'amplitude totale réfléchie est la superposition de toutes les ondes réfléchies :

   $$r_{12} + t_{12}r_{21}t_{21}e^{i\pi} + t_{12}t_{21}r_{12}t_{12}t_{21}e^{2i\pi} + ...$$

   Avec $r_{21} = -r_{12}$, on obtient une série géométrique de raison $t_{12}t_{21}$ dont la somme donne

   $$r^{TE} = r_{12}\frac{1-(t_{12}t_{21})^N}{1-t_{12}t_{21}} \simeq \frac{r_{12}}{1-t_{12}t_{21}} = \frac{n_1 cos\theta_i + n_2 cos\theta_t}{n_1 cos\theta_i - n_2 cos\theta_t} = \frac{n_1^2+n_2^2}{n_1^2-n_2^2} \simeq -2.12.$$

   Ce résultat n'est pas physique ; la conservation de l'énergie impose $r^2+t^2=1$ donc on doit avoir $r<1$. L'hypothèse n'est pas valide : on ne peut pas négliger les réflexions multiples qui atténuent le faisceau.

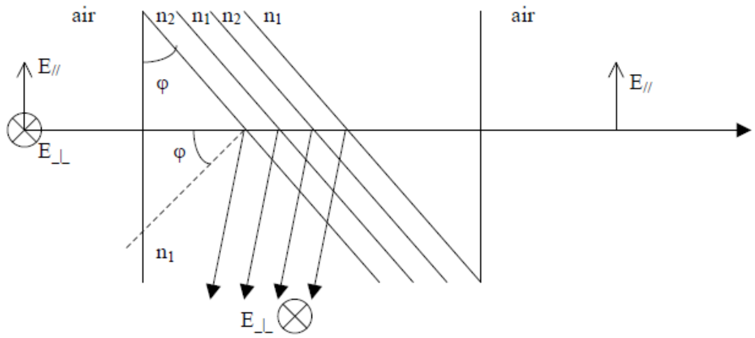
   Pour traiter correctement le problème, il faut passer par des matrices de transfert décrivant le passage d'une lame. Le calcul montre que $r^{TE} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

   (c) Dans le cas transerve magnétique, on a montré que la réflexion était nulle. On a donc $r^{TM} = 0$.

Conclusion

En jouant sur une succession de lames diélectriques, on peut réaliser un dispositif qui sépare les polarisations : la polarisation TE est réfléchie alors que la polarisation TM est transmise.

Ce dipositif est très régulièrement utilisé en laboratoire, en particulier en physique atomique, pour diviser un faisceau en deux ou pour s'assurer de la direction de sa polarisation.


air
n_2 n_1 n_2 n_1
air
$E_{//}$
φ
$E_{\perp}$
φ
$E_{//}$
n_1
$E_{\perp}$