

Angle de déviation

On considère une particule soumise à une force newtonienne $\vec{F} = -m \frac{K}{r^2} \vec{u}_r$ générée par une source située à l'origine O . La particule vient de l'infini avec une vitesse $\vec{v}_i = v_0 \vec{u}_x$ et un paramètre d'impact b ; on note sa vitesse finale \vec{v}_f . On veut déterminer la déviation ϕ subie par la particule lors de son mouvement.

1. Montrez que le mouvement de la particule est plan et exprimez les grandeurs conservées lors du mouvement en fonction des paramètres initiaux.
2. En intégrant le principe fondamental de la dynamique, montrez la relation

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = K \int_{t_i}^{t_f} \frac{\vec{u}_r}{r^2} dt$$

3. Justifiez la relation $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0 b}{r^2}$ et en déduire la relation

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \frac{1}{v_i b} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \vec{u}_r d\theta$$

4. En projetant la relation précédente sur l'axe \vec{u}_y , déduire que la déviation ϕ de la particule α vérifie la relation

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{K}{v_0^2 b}$$

Modèle atomique de Rutherford

En 1911, le néo-zélandais Ernest Rutherford propose le modèle atomique suivant :

- Les charges négatives sont portées par des électrons ponctuels qui orbitent en une sphère de rayon $a \simeq 0.5 \text{ nm}$.
- Les charges positives sont concentrées dans un noyau de dimension $r_n \ll a$.

Ce modèle a été établi à la suite d'une expérience menée par Geiger et Marsden : on envoie une particule α (2 protons, 2 neutrons, $E_c = 5.3 \text{ MeV}$) vers une feuille d'or d'épaisseur $d = 0.2 \mu\text{m}$ et de surface S . On suppose que les atomes d'or ($Z = 79$) sont répartis uniformément dans la feuille avec une densité $\rho = a^{-3}$ et sont suffisamment peu nombreux pour qu'on puisse superposer simplement leurs effets.

1. Justifiez rapidement qu'on puisse négliger l'effet des électrons des atomes d'or sur les particules α en faisant abstraction des noyaux, puis qu'on puisse supposer les noyaux des atomes d'or immobiles.
2. Exprimez la probabilité pour que la particule α soit déviée d'un angle supérieure à une valeur ϕ_0 donnée.
3. On mesure en moyenne qu'une particule sur un 1500 est déviée de plus de 10° . Commentez.
4. On mesure en moyenne qu'une particule sur 200 000 est déviée de plus de 90° . Commentez.
5. On mesure en moyenne qu'une particule sur 1 000 000 est déviée de plus de 150° . Commentez.

Solution

On suppose le référentiel du centre diffuseur galiléen.

1. Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ donc la direction du produit vectoriel $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est constante donc le mouvement est plan. Par ailleurs, la conservation de la norme de \vec{L} impose $r^2\dot{\theta} = \text{cste}$. Le moment cinétique initial vaut $m \begin{pmatrix} x_0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}_{x,y,z} \wedge \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{x,y,z} = mbv_0$.

Le théorème de l'énergie mécanique donne $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{N.C.}$. Comme il n'y a pas de forces non conservatives, on a $E_m = \text{cste}$. L'énergie cinétique initiale vaut $E_m = E_p(r = +\infty) + E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2$.

2. Le principe fondamental de la dynamique donne

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= mK \frac{\vec{u}_r}{r^2} \\ \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_f} d\vec{v} &= K \int_{t_i}^{t_f} \frac{\vec{u}_r}{r^2} dt \\ \Rightarrow \vec{v}_f - \vec{v}_i &= K \int_{t_i}^{t_f} \frac{\vec{u}_r}{r^2} dt \end{aligned}$$

3. La conservation du moment cinétique donne $r^2 \frac{d\theta}{dt} = v_i b \Rightarrow dt = \frac{r^2}{v_i b} d\theta$. On a alors, par changement de variable, $\int_{t_i}^{t_f} \frac{\vec{u}_r}{r^2} dt = \frac{1}{v_i b} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \vec{u}_r d\theta$ avec $\theta_i = 0$ et $\theta_f = \pi - \phi$.
4. En projetant sur \vec{u}_y , on obtient (avec $\vec{u}_r = -\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$ et $v_f = v_i = v_0$) :

$$\begin{aligned} v_i \sin \phi &= \frac{K}{v_0 b} \int_0^{\pi-\phi} \sin \theta d\theta \\ \Rightarrow 2v_i \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} &= \frac{K}{v_0 b} (1 + \cos \phi) \\ &= 2 \frac{K}{v_0 b} \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{K}{v_0^2 b}$$

5. Application à l'expérience de Rutherford

- (a) Considérons le problème à deux corps {électron-particule α }. La particule α est beaucoup plus massive que l'électron ; par conséquent, le centre de masse du système est confondu avec celui de la particule α . Or le système est isolé ; le mouvement de son centre de masse est donc rectiligne uniforme. On peut donc négliger l'effet des électrons sur la particule α . Le même raisonnement s'applique sur le système {noyau-particule α }.
- (b) Pour qu'une particule soit déviée d'un angle $\phi \geq \phi_0$, il faut que son paramètre d'impact soit plus petit qu'une valeur critique $b_0 = \frac{K}{v_0^2 \tan(\phi/2)}$. Chaque noyau représente donc une cible de surface πb_0^2 . La probabilité de toucher une cible donnée est $p = \frac{\pi b_0^2}{S}$. Il y a en tout $\rho S d$ noyaux ; la probabilité pour qu'une particule soit déviée de plus de ϕ_0 vaut donc $\frac{\pi K^2 d a^{-3}}{v_0^4 \tan^2(\phi/2)}$.
- (c) Les deux premiers résultats sont compatibles avec l'analyse précédente et montrent que
 - i. La matière est essentiellement vide (presque aucune particule n'est déviée, résultat 1)
 - ii. Le noyau est de taille inférieure à $b_0(90^\circ) \simeq 2.5 \cdot 10^{-14} m$ (puisque le résultat 2 est cohérent)
 - iii. Le troisième résultat n'est pas cohérent avec la théorie, ce qui veut dire d'autres effets interviennent quand le paramètre d'impact est plus petit, donc la distance minimale entre la particule α et le noyau se réduit. La prise en compte de la taille du noyau et des effets d'interactions fortes devient nécessaire.

Bonus application à un flux de particules, section efficace différentielle

En réalité, on n'envoie pas une seule particule α mais un flux uniforme J par unité de temps et de surface. On suppose que toutes les particules α ont la même vitesse initiale \vec{v}_i normale à la surface de la feuille.

1. Exprimez le nombre de particules par unité de temps présentant un paramètre d'impact compris entre une valeur b et $b + db$.

La couronne comprise entre b et $b + db$ représente une surface $dS = 2\pi b db$. Le nombre de particules traversant cette surface par unité de temps est alors $dn(b) = JdS = 2\pi Jb db$.

2. En déduire le nombre de particules $dn(\phi)$ déviées d'un angle compris entre ϕ et $\phi + d\phi$ par unité de temps.

Les particules déviées d'un angle compris entre ϕ et $\phi + d\phi$ ont initialement un paramètre d'impact compris entre b et $b + db$ avec $db = \frac{db}{d\phi} d\phi = -\frac{K}{2v_0^2 \sin^2(\phi/2)} d\phi$. On a donc $dn(\phi) = 2\pi Jb db = \frac{-2\pi JK^2}{2v_0^4 \tan(\phi/2) \sin^2(\phi/2)} d\phi$.

3. On définit la section efficace différentielle $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\phi)$ par la relation

$$dn(\phi) = J \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \phi d\phi.$$

Montrez que $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4(\phi/2)}$.

Par identification, on trouve $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{JK^2}{2v_0^4 \sin \phi \tan(\phi/2) \sin^2(\phi/2)} = \frac{JK^2}{4v_0^4} \frac{1}{\sin^4(\phi/2)}$

Bonus Comparaison au modèle de Thomson

J.J. Thomson avait proposé le modèle atomique suivante :

- Les charges positives sont uniformément réparties en volume dans une sphère de rayon a .
- Les électrons sont des particules positives susceptibles de se déplacer à l'intérieur de l'atome.

1. Exprimez le champ électrique produit par les charges positives en tout point de l'espace et en déduire la valeur maximale prise par le champ.

Le théorème de Gauss donne immédiatement

$$\vec{E}(r < a) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \vec{u}_r \qquad \vec{E}(r > a) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

Le champ est donc maximal en $r = a$ et vaut alors $E_{max} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^2}$.

2. On se donne un modèle simplifié pour estimer la déviation maximale attendue : on suppose que les particules α subissent un champ $E_{max} \vec{u}_y$ constant durant leur traversée du noyau. De quelle angle sont elles alors déviées ? Commentez

Les particules α mettent au plus un temps $\frac{2a}{v_0}$ à traverser le noyau. Elles subissent pendant ce temps une force $2eE_{max} \vec{u}_y$. Leur vitesse finale est donc $\vec{v}_f = v_0 \vec{u}_x + \frac{2eE_{max}}{m} \frac{2a}{v_0} \vec{u}_y$. L'angle de déviation est alors donné par $\tan \phi = \frac{2eE_{max}}{m} \frac{2a}{v_0} \frac{1}{v_0} = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 a m v_0^2} < 1$ mrad.

La déviation attendue pour le modèle de Thomson est très inférieure à celles mesurées expérimentalement. Alors qu'il pensait vérifier expérimentalement le modèle de Thomson, Rutherford a donc été surpris de voir les particules α rebondir avec des angles supérieurs à $\pi/2$. Il dira à ce propos :

"It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you."