Exercice Modulateur Accousto Optique

1. Rappelez succintement le modèle de la lumière utilisé en optique ondulatoire. On exprimera en particulier les liens entre le champ $A$ utilisé en optique et le champ électrique $E$, ainsi que la définition de l'intensité.
2. Une source $S$ ponctuelle est placée au foyer objet d'une lentille $L_1$ de distance focale $f'$ et émet une onde monochromatique de pulsation $\omega$ et d'amplitude $A_0$. On place à une distance $D_1$ de la lentille $L_1$ une pupille de diffraction de transparence $\tau(P)$. On observe la figure de diffraction sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille $L_2$ de distance focale $f'$. Rappelez les conditions de Fraunhoffer et vérifiez que le dispositif proposé correspond bien à leurs critères.
3. Enoncez le principe de Huygens Fresnel et montrez que l'amplitude complexe $A(M)$ en tout point $M = (x_M, y_M)$ de l'écran peut s'écrire
$$A\left(x_M, y_M\right) = KA_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]} \iint \tau(P) e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x_M x_P + y_M y_P)} dx_P dy_P$$
4. . En déduire l'expression du champ électrique $E(M,t)$ en tout point $M$ de l'écran et à tout instant $t$.
5. La pupille, de dimensions $a \times b$, est constituée d'une lame d'épaisseur $e$ et d'indice optique $n(x,y)$. On veut en calculer la transparence
   (a) Soit $\overrightarrow{E_{in}}(x,y) = A_{in}(x,y)e^{-i\omega t}\overrightarrow{u_x}$ le champ électrique en $z=0$, à l'entrée de la lame. Exprimez le champ $\overrightarrow{E_{out}}(x,y) = A_{out}(x,y)e^{-i\omega t}\overrightarrow{u_x}$ en $z=e$, en sortie de la lame. En déduire la transparence $\tau(x,y) = \frac{A_{out}(x,y)}{A_{in}(x,y)}$.
   (b) On donne $n(x,y) = n_0 \cos(qx - \phi(t))$. Exprimez la transparence $\tau(x,y)$ d'une telle pupille.
6. En limitant le développement de l'exponentielle au premier ordre, montrez que l'amplitude diffractée est la superposition de 3 contributions distinctes.
7. La phase de la pupille suit la loi $\phi = \Omega t$. En déduire la présence de trois taches sur l'écrans. Quel est l'intéret d'un tel dispositif ?
8. Comment interviendraient d'après vous les ordres suivants dans le développement de l'exponentielle en fonctions de Bessel ?

*Formulaire* $e^{i\varphi_0 \cos(u)} = J_0(\varphi_0) + i2J_1(\varphi_0)\cos(u) - 2J_2(\varphi_0)\cos(2u)...$ *où les fonctions $J_i$ sont les fonctions de Bessel d'ordre $i$.*

Evaluation

**Connaissance du cours** (/10)

- Modèle de la lumière (champ scalaire correspondant à un champ électrique polarisé, propogation, théorème de superposition, relation entre amplitude et intensité)
- Conditions de Fraunhoffer
- Principe de Huygens Fresnel
- Notion de cohérence temporelle (superposition de franges pour des longueurs distinctes, des amplitudes pour une longueur d'onde donnée)

**Calcul** (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

**Sens physique** (contextualisation, analyse) (/4)

**Comportement** (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

1. Champ considéré en optique = une composante d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement. On peut donc utiliser les propriétés des équations de Maxwell et en particulier

   - leur linéarité qui implique superposition des amplitudes,
   - La forme de l'équation de propagation (d'Alembert) qui implique
     - la forme $E(\overrightarrow{r},t) = E_0 e^{i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}} e^{-i\omega t}$ d'où la relation $\varphi(M) = \varphi(O) + \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM}$
     - la relation de dispersion $k = \frac{n\omega}{c}$.

   Définition de l'intensité : $I(M) = \langle \overrightarrow{\pi}(M,t)\rangle = \frac{1}{\mu_0 c}\left\langle E^2(M,t)\right\rangle$

2. Fraunhoffer : Source à l'infinie et observation à l'infinie (ou de manière équivalente, éclairage et diffusion en ondes planes).

3. Principe de Huygens Fresnel

   (a) Huygens : Chaque élément de surface d'une pupille de diffraction réémet vers l'avant une onde d'amplitude proportionnelle à l'onde reçue.

   (b) Frensel : toutes les ondes diffractées sont cohérentes et l'ampltiude résultante est donc la superposition de toutes les amplitudes diffractées.

   Amplitude diffractée dans la direction $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M} \simeq \frac{1}{f'}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ f' \end{pmatrix}$ de $M$ depuis la direction $-\overrightarrow{u_0} = \frac{\overrightarrow{O_1S}}{O_1S} \simeq \frac{1}{f'}\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ f' \end{pmatrix}$ de la source $S$ :

$$\begin{aligned}
A_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u_0}} &= \iint dA_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u_0}}(P) \\
&= \iint K\tau(P)A_{\overrightarrow{u_0}}(P)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[PM]}d\Sigma(P) \\
&= \iint K\tau(P)A_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SP]}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[PM]}d\Sigma(P) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}\iint K\tau(P)A_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}([SPM]-[SOM])}d\Sigma(P) \\
&= KA_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}\iint \tau(P)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u_0})}d\Sigma(P)
\end{aligned}$$

   On a enfin $E(M,t) = A(M)e^{-i\omega t}$

4. $\overrightarrow{E_{out}}(x,y,t) = \overrightarrow{E_0}e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}ne-\omega t\right)} = \overrightarrow{E_{in}}(x,y,t)e^{\frac{2i\pi}{\lambda}n(x,y)e}$ et $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}c$ donc $\tau(x,y) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}en_0 cos(qx-\phi)} = e^{i\varphi_0 cos(qx-\phi)} \simeq J_0(\varphi_0) + i2J_1(\varphi_0)\cos(qx+\phi)$

5. Avec $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{u} = \frac{1}{f'}(x_M x_P + y_M y_P)$, l'amplitude est donnée par

$$\begin{aligned}
A_{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u_0}} &= KA_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}\iint \left(J_0(\varphi_0) + i2J_1(\varphi_0)\cos(qx-\phi)\right)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u_0})}d\Sigma(P) \\
&= J_0(\varphi_0)KA_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}\iint e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{u}}d\Sigma(P) + iJ_1(\varphi_0)KA_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}e^{-i\phi}\iint e^{iqx_P}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{u}}d\Sigma(P) \\
&\quad + iJ_1(\varphi_0)KA_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}e^{+i\phi}\iint e^{-iqx_P}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{u}}d\Sigma(P)
\end{aligned}$$

   Et

$$\iint e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{u}}d\Sigma(P) = \iint e^{i\frac{2\pi}{\lambda f'}(x_M x_P + y_M y_P)}d\Sigma(P)$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint e^{i\frac{2\pi x_M}{\lambda f'}x_P}dx_P \times \iint e^{i\frac{2\pi y_M}{\lambda f'}y_P}dy_P \\
&= \frac{1}{\frac{2i\pi x_M}{\lambda f'}}\left(e^{i\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}} - e^{-i\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}}\right)\frac{1}{\frac{2i\pi y_M}{\lambda f'}}\left(e^{i\frac{a\pi y_M}{\lambda f'}} - e^{-i\frac{a\pi y_M}{\lambda f'}}\right) \\
&= ab\,\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\iint e^{\pm iqx_P}e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{u}}d\Sigma(P) &= \iint e^{iqx_P}e^{i\frac{2\pi}{\lambda f'}(x_Mx_P+y_My_P)}d\Sigma(P) \\
&= \iint e^{i\left(\frac{2\pi x_M}{\lambda f'}\pm q\right)x_P}dx_P \times \iint e^{i\frac{2\pi y_M}{\lambda f'}y_P}dy_P \\
&= \frac{1}{\frac{2i\pi x_M}{\lambda f'}}\left(e^{i\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}\pm\frac{qa}{2}} - e^{-i\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}\pm\frac{qa}{2}}\right)\frac{1}{\frac{2i\pi y_M}{\lambda f'}}\left(e^{i\frac{a\pi y_M}{\lambda f'}} - e^{-i\frac{a\pi y_M}{\lambda f'}}\right) \\
&= ab\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda f'}\left(x_M \pm \frac{\lambda f' q}{2\pi}\right)\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right)
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
A(M) = KA_0abe^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}\left(J_0(\varphi_0)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right) + iJ_1(\varphi_0)e^{\mp i\phi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda f'}\left(x_M \pm \frac{\lambda f' q}{2\pi}\right)\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right)\right)
$$

6. En réintroduisant les dépendances temporelles,

$$
A(M,t) = KA_0abe^{i\frac{2\pi}{\lambda}[SOM]}\left(J_0(\varphi_0)e^{-i\omega t}\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right) + iJ_1(\varphi_0)e^{-i(\omega\pm\phi)t}\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda f'}\left(x_M \pm \frac{\lambda f' q}{2\pi}\right)\right)\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right)\right)
$$

On voit donc apparaitre trois contributions avec des fréquences différentes ($\omega$, $\omega+\Omega$ et $\omega-\Omega$) et qui ne sont donc pas cohérentes temporellement. L'intensité totale est donc donnée par la somme des intensités :

$$
\begin{aligned}
I(M) = \left\langle |A(M,t)|^2 \right\rangle &= I_0J_0^2(\varphi_0)\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{a\pi x_M}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right) \\
&\quad + I_0J_1^2(\varphi_0)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda f'}\left(x_M \pm \frac{\lambda f' q}{2\pi}\right)\right)\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{b\pi y_M}{\lambda f'}\right) \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
$$

- $I_1$ donne une tache en $(0,0)$ avec une longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}c$
- $I_2$ donne une tache en $(-\frac{\lambda f' q}{2\pi}, 0)$ avec une longueur d'onde $\lambda_2 = \frac{2\pi}{\omega-\Omega}c$
- $I_3$ donne une tache en $(+\frac{\lambda f' q}{2\pi}, 0)$ avec une longueur d'onde $\lambda_3 = \frac{2\pi}{\omega+\Omega}c$

7. Les ordres supérieurs donneront des taches en $\pm p\frac{\lambda f' q}{2}$ avec des longueur d'onde $\frac{2\pi}{\omega \pm p\Omega}c$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Un modulateur accousto optique permet de générer de nouvelles longueur d'ondes (et de couper très rapidement un faisceau : en arrêtant la modulation dans le cristal de la pupille, on fait disparaitre quasi instantannément les modes diffractés).