Exercice Piège de Penning

1. On cherche à piéger une particule de masse m et de charge q en utilisant un champ électrique. On considère tout d'abord $V(\overrightarrow{r}) = V_0\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)$. Montrez que la particule n'a pas de position d'équilibre stable.

2. On ajoute un champ magnétique de la forme $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$

   (a) Montrez que la trajectoire de la particule vérifie le système différentiel
   $$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \\ -z \end{pmatrix} + \omega_c \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$
   où on exprimera les pulsations ω et ω_c.

   (b) Résoudre l'équation du mouvement selon z.

   (c) On pose $\xi = x + iy$. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par ξ

   (d) On supposera par la suite $\omega \ll \omega_c$. En déduire l'expression de ξ.

   (e) En déduire que la particule reste piégée dans le piège de Penning.

3. Montrez que, de manière général, un champ électrostatique seul ne permet jamais de piéger une particule chargée dans le vide.

Evaluation

Connaissance du cours (/10)

- $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$, $E_p = qV$
- Equilibre $\overrightarrow{grad}E_p = 0$ stable $\partial_x^2 > 0$
- Mouvement dans un champ magnétique
- Equation du second ordre à coefficients constants

Calcul (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

Sens physique (contextualisation, analyse) (/3)

Comportement (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

Daniel Suchet - 2012

Correction

1. L'énergie potentielle est donnée par $E_p = qV = qV_0\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)$. Elle n'admet aucun minimum local, donc aucune position d'équilibre stable.

2. Avec $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ et un champ $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = V_0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$

   (a) Le principe fondamental de la dynamique donne

$$
\begin{aligned}
m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} &= qV_0\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} &= \frac{2qV_0}{m}\begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \\ -z \end{pmatrix} + \frac{qB_0}{m}\begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \omega^2\begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \\ -z \end{pmatrix} + \omega_c\begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   (b) Suivant z : $\ddot{z} = -\omega^2 z$ donc $z = z_0 cos\left(\omega t + \varphi\right)$

   (c) $\ddot{\xi} + i\omega_c\dot{\xi} - \frac{\omega^2}{2}\xi = 0$

   (d) Avec $\omega_c \gg \omega$, $-\omega_c^2 + 2\omega^2 < 0$ donc $r = \frac{-i\omega_c \pm i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega^2}}{2}$ soit, avec un DL à l'ordre 2 de $\sqrt{1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \simeq 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}$

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{-i\omega_c + i\omega_c\sqrt{1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}{2} \\
&= -i\frac{\omega^2}{2\omega_c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_2 &= \frac{-i\omega_c - i\omega_c\sqrt{1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}{2} \\
&= -i\omega_c
\end{aligned}
$$

   soit $\xi = Ae^{-i\omega_c t} + Be^{-i\frac{\omega^2}{2\omega_c}t}$ d'où

   (e) Les particules restent bien piégées : leurs excursions spatiales restent bornées.

$$
\begin{aligned}
x &= A_x cos\left(\omega_c t + \varphi_{x1}\right) + B_x cos\left(\frac{\omega^2}{2\omega_c}t + \varphi_{x2}\right) \\
y &= A_y cos\left(\omega_c t + \varphi_{y1}\right) + B_y cos\left(\frac{\omega^2}{2\omega_c}t + \varphi_{xy}\right)
\end{aligned}
$$

3. Dans le vide l'équation de Maxwell Gauss donne $\Delta V = 0$ soit $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. On a donc nécessairement l'un des trois termes positif ou nul. Toute position d'équilibre est donc instable au moins dans une direction.