Préparation L'Etoile de la mort

On chercher à déterminer l'énergie nécessaire à désintégrer une planète.

1. On considère une boule de rayon r. Quel volume faut il lui apporter pour augmenter son rayon de dr ? Quelle masse dm du matériau ce volum représente t il ?
2. On considère un système formé de la masse dm à l'infini et de la boule de rayon r. Exprimez l'énergie potentielle du système en fonction de $E_p(r)$, énergie potentielle d'une boule de rayon r et de masse volumique ρ.
3. On répartit à présent la masse dm sur la surface de la boule. Déterminez l'expression de $E_p(r+dr)$ en fonction de $E_p(r)$ et de dr. En déduire une équation différentielle vérifiée par $E_p(r)$. En déduire l'énergie potentielle de la boule.
4. Calculez l'énergie nécessaire pour dissloquer une planète semblable à la Terre.
5. Dans l'épisode IV de Star Wars (un nouvel espoir), on peut estimer l'énergie libérée par l'Etoile de la mort pour détuire Alderaan (qu'on supposera semblable à la Terre) à environ $10^{37}J$. Comment expliquer la différence avec le résultat précédent ?

Live Ressort gravitationnel

1. Par des analogies convenablement choisies, justifiez la forme du théorème de Gauss gravitationnel sous forme locale
$$div\,(\overrightarrow{g}) = -4\pi G\rho$$
où $\overrightarrow{g}$ est le champ de gravitation, G la constante universelle de gavitation et ρ la masse volumique
2. En déduire l'expression du champ de gravité en tout point d'une boule de rayon R et de masse volumique ρ uniforme.
3. On considère une planète de rayon R et de masse volumique ρ. On creuse un tunnel qui la traverse de part en part en passant par le centre. On supposera le tunnel suffisamment fin pour ne pas perturber la symétrie du problème. On lache à un bout du tunnel une bille de masse m. Déterminez son mouvement.

Evaluation

Connaissance du cours (/10)

- Energie potentielle de gravitation
- Energie potentielle d'un système = énergie nécessaire pour créer ce système depuis l'infini
- Maxwell Gauss, force de Coulomb, force de Newton, analogies
- Ordres de grandeur

Calcul (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

Sens physique (contextualisation, analyse) (/4)

Comportement (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

Correction

Etoile de la mort

- Passer de r à $r+dr$ change le volume de $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ en $V + dV = \frac{4}{3}\pi(r+dr)^3 \simeq V + 4\pi r^2 dr$. On doit donc apporter le volume $dV = 4\pi r^2 dr$ ce qui correspond à une masse $dm = 4\pi r^2 \rho dr$.
- L'énergie potentielle d'une boule de rayon $r+dr$ est celle d'une boule de rayon r + celle de la couche de masse dm ajoutée à une distance r du centre de la boule : $E_p(r+dr) = E_p(r) + E_p(dm, r) = E_p(r) - G\frac{m(r)dm}{r}$ donc $\frac{dE_p}{dr} = -G\frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3 4\pi r^2\rho}{r} = -\frac{16\pi^2 G}{3}\rho^2 r^4$ et $E_p(R) = -\frac{16\pi^2 G}{15}\rho^2 R^5$
$$E_p(R) = -\frac{16\pi^2 G}{15}\frac{9}{16\pi^2 R^6}M^2R^5 = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$
- Masse de la Terre $\simeq 10^{24}$kg et $R = 6\,10^3$m donc $E_p \simeq -6\,10^{33}$. Pour ramener tous les éléments de la planète à l'infini, il faut fournir $-E_p$.
- L'énergie déterminée ci dessus correspond à l'énergie minimale, ie à l'énergie pour fournir à chaque élément de la planète la vitesse de libération. Pour la Terre, $v_{lib} = 11\,\text{km.s}^{-1}$; donc il faut environ 10 minutes pour que la planète double de rayon. L'explosion est beaucoup plus rapide dans Star Wars : une énergie cinétique importante est fournie en plus de l'énergie potentielle.

Ressort gravitationnel

Electrostatique	Gravitation
$\overrightarrow{F_C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	$\overrightarrow{F_G} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$
$\overrightarrow{F_C} = q_1\overrightarrow{E}$	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$	$\overrightarrow{g} = -G\frac{m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

  d'où les analogies

charge q	masse m
charge volumique ρ_q	masse volumique ρ
constante de couplage $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	constante de couplage $-G$

  et on en déduit le théorème de Gauss local
  $$div\overrightarrow{E} = 4\pi\frac{\rho_q}{4\pi\epsilon_0} \Longrightarrow div\overrightarrow{g} = -4\pi G\rho$$
  et intégral
  $$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Longrightarrow \oiint \overrightarrow{g}.\overrightarrow{dS} = -4\pi GM_{int}$$
- Invariance de la répartition de masse par rotation et symétrie sphérique du problème : $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) = g(r)\overrightarrow{u_r}$
  Surface de Gauss = sphère de rayon r. $4\pi r^2 g(r) = -4\pi G\frac{4}{3}\pi r^3\rho$ donc $g(r) = -\frac{4\rho G}{3}r\overrightarrow{u_r}$.
- La masse est soumise à $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g(r)} = -m\frac{4\rho G}{3}r\overrightarrow{u_r} = -kr\overrightarrow{u_r}$: mouvement d'oscillateur harmonique