Préparation Effet Faraday & isolateur optique

On s'intéresse à la propagation d'une onde électrique de la forme $\overrightarrow{E}(z)e^{i\omega t} = \overrightarrow{E_0}e^{-ikz}e^{i\omega t}$ dans un milieu diélectrique en présence d'un champ magnétique extérieur statique $B_{stat}\overrightarrow{u_z}$. On considère que le milieu est dôté de n électrons par unité de volume.

1. On considérera chaque électron comme élastiquement lié à un noyau, avec une pulsation caratéristique ω_0. Donnez l'équation vérifiée par l'ampltiude du déplacement des électrons par rapport à leurs positions d'équilibre en régime forcé.
2. En déduire une relation entre l'amplitude du vecteur densité de polarisation $\overrightarrow{P}(z)$ et celles des champ électrique et du champ magnétique statique. Exprimez cette relation sous forme d'une égalité matricielle entre les composantes de $\overrightarrow{P}(z)$ et celle de $\overrightarrow{E}(z)$:

$$\begin{pmatrix} P_x(z) \\ P_y(z) \\ P_z(z) \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{\chi_0}{1-u^2} & -i\frac{\chi_0 u}{1-u^2} & 0 \\ i\frac{\chi_0 u}{1-u^2} & \frac{\chi_0}{1-u^2} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ E_z(z) \end{pmatrix}.$$

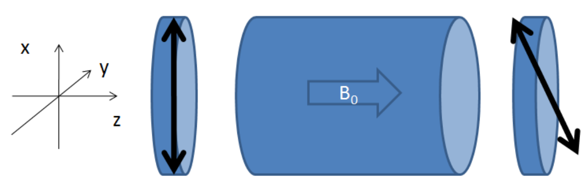
   On posera $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$, $\chi_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2}$, $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ et $u = \frac{\omega\omega_c}{\omega_0^2-\omega^2}$.
3. On admet que le champ dans un tel milieu est transverse et que la relation de propagation du champ est donnée par

$$\Delta\overrightarrow{E}(z,t) - \begin{bmatrix} 1+\frac{\chi_0}{1-u^2} & -i\frac{\chi_0 u}{1-u^2} & 0 \\ i\frac{\chi_0 u}{1-u^2} & 1+\frac{\chi_0}{1-u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\chi_0 \end{bmatrix} \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\overrightarrow{E}(z,t) = 0.$$

   Déterminez la relation de dispersion reliant k à ω.

Suite Isolateur Optique

- La relation précédente montre qu'une onde polarisée circulaire droite (resp circulaire gauche) subit un indice $n_- = \sqrt{1+\frac{\chi_0}{1-u^2}-\frac{\chi_0 u}{1-u^2}}$ (resp $n_+ = \sqrt{1+\frac{\chi_0}{1-u^2}+\frac{\chi_0 u}{1-u^2}}$). Comment évolue une onde initialement polarisée dans la direction $\overrightarrow{u_x}$ après avoir parcouru une distance L dans le milieu ?
- Montrez qu'une onde contrapropageante subit le même effet qu'une onde propageante.
- On considère le montage ci contre, avec un milieu tel que $\frac{n_+-n_-}{2}\frac{\omega L}{c} = \frac{\pi}{4}$ et deux polariseurs. Montrez qu'une onde se propageant vers les z croissants peut traverser le dipositif alors qu'une onde se propageant vers les z décroissants est arrêtée.



Evaluation

Connaissance du cours (/10)

- Modèle de l'électron élastiquement lié, régime forcé
- Susceptibilité diélectrique
- Relation de dispersion
- Polarisation de la lumière

Calcul (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

Sens physique (contextualisation, analyse) (/4)

Comportement (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

Correction

1. Le principe fondamental de la dynamique donne, en supposant le noyau au repos dans un référentiel galiléen (approx de Born Oppenheimer) : $-\omega^2\overrightarrow{r}(z) = -\omega_0^2\overrightarrow{r}(z) - \frac{e}{m}\overrightarrow{E}(z) - i\frac{e\omega}{m}\overrightarrow{r}(z)\wedge\overrightarrow{B_0}$
2. $\overrightarrow{P}(z)d\tau = nd\tau(-e)\overrightarrow{r}(z)$ donc $\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\overrightarrow{P}(z) + i\frac{e\omega}{m}\overrightarrow{P}(z)\wedge\overrightarrow{B_0} = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E}(z)$ ie

$$\begin{aligned}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)P_x(z) + i\omega_c\omega P_y(z) &= \epsilon_0\omega_p^2 E_x(z)\\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)P_y(z) - i\omega_c\omega P_x(z) &= \epsilon_0\omega_p^2 E_y(z)\\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)P_z(z) &= \epsilon_0\omega_p^2 E_z(z)\end{aligned}$$

On inverse les deux premières équations par un système de Cramers :
$\begin{vmatrix}\left(\omega_0^2-\omega^2\right) & i\omega_c\omega\\ -i\omega_c\omega & \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\end{vmatrix} = \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 - \omega^2\omega_c^2$ donc

$$\begin{aligned}P_x(z) &= \frac{\begin{vmatrix}\epsilon_0\omega_p^2E_x(z) & i\omega_c\omega\\ \epsilon_0\omega_p^2E_y(z) & \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\end{vmatrix}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2}\\ &= \epsilon_0\frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega\omega_c}E_x(z) - i\epsilon_0\frac{\omega_c\omega\omega_p^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2}E_y(z)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}P_y(z) &= \frac{\begin{vmatrix}\left(\omega_0^2-\omega^2\right) & \epsilon_0\omega_p^2E_x(z)\\ -i\omega_c\omega & \epsilon_0\omega_p^2E_y(z)\end{vmatrix}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2}\\ &= i\epsilon_0\frac{\omega_c\omega\omega_p^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2}E_x(z) + i\epsilon_0\frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega\omega_c}E_y(z)\end{aligned}$$

Avec $\frac{\omega_p^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2} = \chi_0\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2} = \frac{\chi_0}{1-u^2}$ et $\frac{\omega_c\omega\omega_p^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2} = \chi_0\frac{\omega_c\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\omega^2\omega_c^2} = \frac{\chi_0 u}{1-u^2}$, on trouve la matrice demandée.
3. La relation de propagation donne $\begin{bmatrix}\left(1+\frac{\chi_0}{1-u^2}\right)\omega^2-c^2k^2 & -i\frac{\chi_0u}{1-u^2}\omega^2\\ i\frac{\chi_0u}{1-u^2}\omega^2 & \left(1+\frac{\chi_0}{1-u^2}\right)\omega^2-c^2k^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}E_{0,x}\\ E_{0,y}\end{pmatrix} = 0$. Il ne peut exister une solution non triviale que si $\begin{vmatrix}\left(1+\frac{\chi_0}{1-u^2}\right)\omega^2-c^2k^2 & -i\frac{\chi_0u}{1-u^2}\omega^2\\ i\frac{\chi_0u}{1-u^2}\omega^2 & \left(1+\frac{\chi_0}{1-u^2}\right)\omega^2-c^2k^2\end{vmatrix} = 0$ ie $\left(\left(1+\frac{\chi_0}{1-u^2}\right)-\frac{k^2}{\omega^2c^2}\right)^2 = \left(\frac{\chi_0u}{1-u^2}\right)^2$
4. Avec $\overrightarrow{u_\pm} = \overrightarrow{u_x}\pm j\overrightarrow{u_y}$, on a $\overrightarrow{E}(0,t) = \frac{E_0}{2}e^{j\omega t}\left(\overrightarrow{u_+}+\overrightarrow{u_-}\right)$ donc $\overrightarrow{E}(L,t) = \frac{E_0}{2}e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}n_+L}\overrightarrow{u_+} + e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}n_-L}\overrightarrow{u_-}\right) = E_0e^{-j\frac{n_++n_-}{2}\frac{\omega L}{c}}\begin{bmatrix}cos\frac{n_+-n_-}{2}\frac{\omega L}{c}\\ sin\frac{n_--n_+}{2}\frac{\omega L}{c}\\ 0\end{bmatrix}$
5. Pour traiter une onde contrapropageante, on change le repère en tournant autour de $\overrightarrow{u_x}$: $\overrightarrow{u_z'} = -\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_y'} = -\overrightarrow{u_y}$. Dans ce nouveau repère, $\overrightarrow{B_{stat}} = -B_{stat}\overrightarrow{u_z'}$ donc $u' = \frac{\omega\omega_c}{\omega_0^2-\omega^2} = -u$ ce qui revient à échanger les n_+ et n_-. La rotation de θ' dans le plan $\overrightarrow{u_x'}, \overrightarrow{u_y'}$ correspond donc à une rotation de θ dans le plan $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}$.
6. Une onde vers le z croissants est polarsiée suivant $\overrightarrow{u_x}$. Le passage au travers du milieu la fait tourner de $-\frac{\theta}{4}$ et elle traverse donc le deuxième polariseur sans modification. A l'inverse, elle est d'abord polarisée dans la direction oblique, tourne jusqu'à $\overrightarrow{u_y}$ et est stoppée par le second polariseur lorsqu'elle parcourt le dispositif dans l'autre sens.