Préparation Milieu LASER

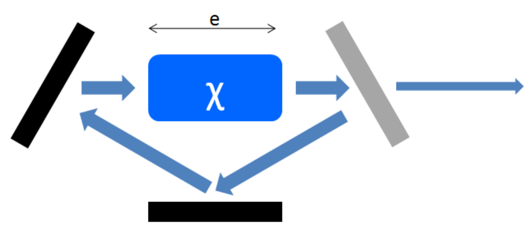
1. Rappelez succintement la définition de la susceptibilité diélectrique χ dans un milieu linéaire, homogène et isotrope.
2. Montrez qu'en absence de charge libre, la prise en compte de la réponse du milieu revient à changer dans l'équation de propagation du champ électrique c en $\frac{c}{n}$, où on exprimera n en fonction de χ.
3. On s'intéresse par la suite à des ondes planes monochromatiques polarisées rectilignement de pulsation ω et se propageant dans la direction x. Donnez la relation de dispersion qui relie le vecteur d'onde k à ω. On notera $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$.
4. On considère un milieu dôté d'une susceptibilité diélectrique complexe $\chi = \chi' + i\chi''$, avec $|\chi| \ll 1$. En déduire que le vecteur d'onde est également complexe avec

$$k' = \left(1 + \frac{\chi'}{2}\right)\frac{\omega}{c} \qquad\qquad k'' = \frac{\chi''}{2}\frac{\omega}{c}$$

5. On considère une onde se propageant dans le milieu décrit précédemment. Reliez son amplitude $E(e,t)$ après la traversée d'une épaisseur e à son amplitude initiale $E(0,t)$.

SUITE

On s'intéresse à présent à une cavité laser composée de deux miroirs parfaits et d'un miroir de coefficient de réflexion en amplitude $r = e^{-\gamma_{cav}}$ tel que $T = |t|^2 \ll 1$. La longueur totale de la cavité est notée L. Dans cette cavité se trouve une lame d'épaisseur e semblable à celle étudiée précédemment. On négligera tout effet de réflexion des ondes sur les dioptres et on supposera le champ électrique continu.



1. Exprimez l'amplitude $E(L,t)$ de l'onde après un tour de cavité en fonction de l'amplitude $E(0,t)$ initiale.
2. L'étude microscopique du milieu amplificateur donne la relation

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\chi''}{2} = \frac{g_0}{1+\frac{I}{I_{sat}}},$$

où $I = \left\langle E^2(0,t)\right\rangle_t$ est l'intensité du laser dans le cristal et I_{sat} une constante. Déterminez l'état du laser en régime stationnaire en fonction de g_0, e, L, λ_0, γ_{cav}, I_{sat} et χ'.

Evaluation

Connaissance du cours (/10)

- Milieu LHI (modélisation, vecteur densité de polarisation)
- Equations de Maxwell (énoncé, découplage)
- Relation de dispersion complexe
- Propagation d'une onde

Calcul (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

Sens physique (contextualisation, analyse) (/4)

Comportement (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

Correction

1. Milieu linéaire $\overrightarrow{P}(\overrightarrow{r},\omega) = \epsilon_0\chi(\overrightarrow{r},\omega)\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},\omega)$, où χ est *a priori* une matrice. Homogène : $\chi(\overrightarrow{r},\omega) = \chi(\omega)$. Isotrope : $\chi(\omega) = \chi(\omega)I_d$
2. Les équations de Maxwell donnent, avec $\rho = \rho_P = -div\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{j_P} = -\frac{\partial\overrightarrow{P}}{\partial t}$ et $1+\chi = n^2$

$$div\left(\epsilon_0 n^2\overrightarrow{E}\right) = 0 \qquad div\left(\overrightarrow{B}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

   Et on retrouve les mêmes équations que dans le vide avec $c \to c/n$, ie $\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$

3. En injectant $E(x,t)\overrightarrow{u_y} = E_0\overrightarrow{u_y}e^{i(\omega t-kx)}$ dans l'équation précédente, on obtient $-k^2+\frac{n^2}{c^2}\omega^2 = 0$ soit $k = \frac{n\omega}{c}$ (solution positive car propagation suivant x croissant).
4. Avec $n = \sqrt{1+\chi} \simeq 1+\frac{1}{2}\chi$, on a $n' = 1+\chi'/2$ et $n'' = \chi''/2$
5. $E(L,t) = r\times\left(e^{i\pi}\right)^2\times e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(L-e)}\times e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\left(1+\frac{\chi'}{2}\right)e}\times e^{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\chi''}{2}e}E(0,t)$
6. En régime stationnaire, soit $E=0$, soit $r\times\left(e^{i\pi}\right)^2\times e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(L-e)}\times e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\left(1+\frac{\chi'}{2}\right)e}\times e^{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\chi''}{2}e} = 1$. Dans ce cas ,

$$\begin{cases} r\,e^{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\chi''}{2}e} = 1 \\ \left(e^{i\pi}\right)^2\times e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(L-e)}\times e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\left(1+\frac{\chi'}{2}\right)e} = 1 \end{cases} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} -\gamma_{cav}+\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\chi''}{2}e = 0 \\ -1+\frac{2\pi}{\lambda}\left(\left(1+\frac{\chi'}{2}\right)(L-e)+\frac{2\pi}{\lambda}(L-e)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{cav} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\chi''}{2}e = \frac{g_0}{1+\frac{I}{I_{sat}}}e \qquad \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(L+\frac{\chi'}{2}e\right) = 1$$

   La seconde condition est une condition de résonance de la cavité (l'onde doit être en phase avec elle même au bout d'un tour)
   La première condition donne $\frac{I}{I_{sat}} = \frac{g_0 e}{\gamma_{cav}}-1$, qui ne peut être vérifiée que si $\gamma_{cav} < g_0 e$ ie si les pertes sont plus petites que le gain non saturé. On a donc

	$\gamma_{cav} > g_0 e$	$\gamma_{cav} < g_0 e$
I	0	$I = I_{sat}\left(\frac{g_0 e}{\gamma_{cav}}-1\right)$