Préparation Quelques éléments de Neutronique en milieu nucléaire

On considère un flux de neutrons dans un milieu constitué d'Uranium à la concentration c_0. Pour simplifier le problème, on supposera le milieu compris entre les plans $x = -L/2$ et $x = L/2$ et on prendra les conditions aux limites $n(-L/2) = n(L/2) = 0$ pour traduire le confinement du milieu. On considérera la vitesse des neutrons unidimensionnelle $\overrightarrow{v_n} = v\overrightarrow{u_x}$ et on note $n(x)$ la densité de neutrons à l'abscisse x. Les neutrons diffusent dans le milieu avec un coefficient de diffusion D.

1. Chaque noyau d'Uranium représente pour un neutron une cible de surface σ. On considère qu'un neutron frappant un atome d'Uranium est absorbé. Montrez que les collisions se traduisent par la perte de $c_0\sigma v n(x)$ neutrons par unité de volume et de temps.
2. Un noyau d'Uranium ayant absorbé un neutrons se désintègre en donnant naissance à p neutrons. Montrez que ces fissions se traduisent par la création de $pc_0\sigma v n(x)$ neutrons par unité de volume et de temps.
3. A l'aide d'un bilan détaillé, établir l'équation d'évolution de la densité de neutrons
4. Montrez que si $p < 1$, il ne peut pas y avoir de solutions stationnaire.

Suite

On supposera par la suite que $p > 1$.

1. Montrez qu'il ne peut y avoir de solution stationnaire que si $p = p_c$, où on exprimera p_c en fonction de L, D, c_0, σ et v.
2. On se place dans le cas $p \neq p_c$ et on cherche une solution de la forme $A(t)cos\left(\frac{(p-1)c_0\sigma v}{D}x\right)$. Exprimez le comportement de $A(t)$ au cours du temps.

Evaluation

Connaissance du cours (/10)

- Equation de Fick
- Réalisation d'un bilan
- Equation de diffusion / de conservation
- Equation différentielle $\lambda^2\partial_x^2 n + n = 0$ (résolution, nature des solutions, conditions aux limites)

Calcul (erreurs, rapidité, homogénéïté, vérifications) (/4)

Sens physique (contextualisation, analyse) (/4)

Comportement (/2)

- Prise en compte des indications
- Adaptation au contexte de l'exercice
- Mojo

Correction

1. On prend un volume Sdx. Nombre de neutrons rentrant dans la surface entre t et t+dt $nSvdt$. Surface représentée par les noyaux d'uranium : $c_0 Sdx\sigma$. Probabilité pour qu'un neutron rencontre un noyau : $\frac{c_0\sigma Sdx}{S} = c_0\sigma dx$. Nombre total de collisions entre x et $x+dx$ et t et $t+dt$: $c_0\sigma nSvdtdx$.
2. Chaque collision crée p neutrons, donc nombre total de neutrons créés entre x et $x+dx$ et t et $t+dt$: $pc_0\sigma nSvdtdx$.
3. Entre x et x+dx, t et t+dt
   Nombre de neutrons à l'instant t : $n(x,t)dxS$
   Nombre de neutrons entrant dans le volume : $j(x,t)Sdt$.
   Nombre de neutrons sortants du volume : $j(x+dx,t)Sdt$.
   Nombre de neutrons absorbé dans le volume $c_0\sigma nSvdtdx$.
   Nombre de neutrons créés dans le volume $pc_0\sigma nSvdtdx$.
   Nombre de neutrons à l'instant $t+dt$: $n(x,t+dt)dxS$
   Bilan : $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + (p-1)c_0\sigma nv$ et avec la loi de Fick $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (p-1)c_0\sigma nv$.
4. En régime stationnaire, $0 = \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}n$. Si $p_c < 1$, on aurait des solutions hyperboliques qui ne peuvent pas s'annuler deux fois.
5. Si $p_c > 1$, n se met donc sous la forme $Acos\left(\sqrt{\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}}x\right) + Bsin\left(\sqrt{\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}}x\right)$. Comme $n(-L/2) = n(L/2)$, $B = 0$ et $\sqrt{\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$ ie $p_c = 1 + \frac{\pi^2}{L^2}\frac{D}{c_0\sigma v}$.
6. En injectant la forme de la solution,
   $$\frac{\partial A}{\partial t}cos\left(\sqrt{\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}}x\right) = A\left(D\frac{\partial^2 cos\left(\sqrt{\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}}x\right)}{\partial x^2} + (p-p_c+p_c-1)c_0\sigma v cos\left(\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}x\right)\right)$$
   et p_c est tel que $D\frac{\partial^2 cos\left(\sqrt{\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}}x\right)}{\partial x^2} + (p_c-1)c_0\sigma v cos\left(\sqrt{\frac{(p_c-1)c_0\sigma v}{D}}x\right) = 0$ donc on obtient $\frac{\partial A}{\partial t} = A\,(p-p_c)c_0\sigma v$ donc $A(t) = A_0 e^{(p-p_c)c_0\sigma vt}$ diverge si $p > p_c$, tend vers 0 si $p < p_c$.