Mécanique des fluides : ondes accoustiques (PC*)

Exercice Pavillon exponentiel

On étudie la propagation d'onde sonore dans un guide de taille variable. On se ramène à un problème unidimensionnel à symétrie cylindrique et on note $R(x)$ le rayon du guide à l'abscisse x. On note ρ_0 la masse volumique du fluide au repos et p_0 la pression à laquelle il est soumis en absence de surpression et χ_0 sa compressibilité. On suppose toutes les grandeurs uniforme dans une tranche dx du fluide. On se limitera dans toute la suite à un développement des expressions au premier ordre des perturbations.

1. En effectuant un bilan de masse entre les abscisses x et $x+dx$ et les instants t et $t+dt$, déterminez une première relation entre ρ, v et S.
2. Exprimez les forces de pressions qui s'exercent sur le volume considéré précédemment.
3. En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur un système convenablement choisi, déterminez une seconde relation entre v et p.
4. Déterminez une troisième relation entre les variables à partir d'une équation thermodynamique.
5. On prend un pavillon tel que $\frac{2}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^+$. Déterminez l'équation de propagation de la surpression.

Solution

1. *Masse entrant dans le système entre t et t+dt :* $\rho_0\pi R(x)^2 v(x)dt$. *Masse sortant du système :* $\rho_0\pi R(x+dx)^2 v(x+dx)dt$. *Masse dans le système à l'instant t :* $\rho(t)\pi R^2 dx$. *Masse dans le système à l'instant t+dt :* $\rho(t+dt)\pi R^2 dx$
Bilan :
$$\begin{aligned}\rho(t+dt)\pi R^2 dx &= \rho(t)\pi R^2 dx + \rho_0\pi R(x)^2 v(x)dt - \rho_0\pi R(x+dx)^2 v(x+dx)dt \\ R^2\partial_t\rho &= -\rho_0\partial_x\left(R(x)^2 v(x)\right)\end{aligned}$$

2. *Pression : en x* $p(x)\pi R(x)^2$. *en x+dx* $-p(x+dx)\pi R(x+dx)^2$. *Contribution de la composante courbe suivant x :* $p(x)sin\alpha\, 2\pi R\,\frac{dx}{cos\alpha}$ *; et avec* $tan\alpha = dR/dx$, *on trouve* $p(x)\,2\pi R\,dR = p(x)d\left(\pi R^2\right)$.
3. *Qté de mouvement entrant dans le système entre t et t+dt :* $\rho_0\pi R(x)^2 v(x)dt\, v(x)$ *(ordre 2). Qté de mouvement sortant du système :* $\rho_0\pi R(x+dx)^2 v(x+dx)dt\, v(x+dx)$ *(ordre 2). Qté de mouvement dans le système à l'instant t :* $\rho(t)\pi R^2 dx\, v(x,t)$. *Qté de mouvement dans le système à l'instant t+dt :* $\rho(t+dt)\pi R^2 dx\, v(x,t+dt)$. *Qté de mouvement apportée au système :* $\overrightarrow{F}dt$
Bilan :
$$\begin{aligned}\rho(t+dt)\pi R^2 dx\, v(t+dt) &= \rho(t)\pi R^2 dx\, v(x,t) + p(x)\pi R(x)^2 - p(x+dx)\pi R(x+dx)^2 + p(x)d\left(\pi R^2\right) \\ R^2\partial_t v\rho &= -\partial_x\left(R(x)^2 p(x)\right) + p(x)\partial_x R^2 \\ \rho_0\partial_t v &= -\partial_x\left(p(x)\right)\end{aligned}$$

4. $\chi_0 = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial P}$ *d'où on tire* $\partial_t p = c^2\partial_t\rho$ *avec* $c^{-2} = \rho_0\chi_0$
5. $\frac{R^2}{c^2}\partial_t^2 p = -\rho_0\partial_x\partial_t\left(R(x)^2 v(x,t)\right) = +\partial_x\left(R(x)^2\partial_x\left(p(x)\right)\right) = 2\partial_x\left(p(x)\right)R_x\partial_x\left(R(x)\right) + R^2(x)\partial_x^2\left(p(x)\right)$
d'où $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 p = \frac{2}{R(x)}\partial_x\left(R(x)\right)\partial_x\left(p(x)\right) + \partial_x^2\left(p(x)\right)$.

EXERCICE MASSE DE JEANS

On considère un nuage interstellaire d'hydrogène de masse volumique ρ soumis à sa propre gravitation. On supposera le problème à symétrie cylindrique.

1. Rappelez la forme de la force de gravitation entre deux corps de masse m_1 et m_2, puis la forme de la force de Coulomb entre deux charges q_1 et q_2, puis le théorème de Gauss pour l'électrostatique et en déduire par analogie le théorème de Gauss pour la gravitation. En déduire l'équivalent de l'équation de Maxwell Gauss pour la gravitation.
2. Montrez qu'en électrostatique, le champ électrique dérive d'un champ scalaire. Par analogie, déterminez l'équation vérifiée par le potentiel gravitationnel Ψ.
3. On traite le gaz du nuage comme un fluide parfait compressible. Etablir l'équation de conservation de la masse et l'équation d'Euler.
4. On cherche une solution stationnaire sous la forme ρ_0, p_0 uniformes et constants, Ψ_0 et $\overrightarrow{v_0} = r\Omega\overrightarrow{u_\theta}$ constants. Déterminez Ω et Ψ_0. A quoi correspond ce mouvement ?
5. On cherche la réponse au premier ordre du système : $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $P = P_0 + P_1$ etc. Exprimez les équations vérifiées par les termes d'ordre 1. On supposera $\overrightarrow{v_1} = v_1(r,z)\overrightarrow{u_z}$ et l'ensemble des variables indépendantes de θ.
6. On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes $\rho_1(r,z,t) = \tilde{\rho_1}e^{-i(k_r r + k_z z - \omega t)}$ etc. Jusitifiez cette forme et déterminez les équations vérifiées par $\tilde{\rho_1}$, $\tilde{P_1}$, $\tilde{\Psi_1}$ et $\tilde{v_1}$.
7. On admet la relation thermodynamque $P_1 = c_s^2\rho_1$, où c_s est la vitesse de propagation des ondes sonores dans le nuage et on s'intéresse aux perturbations longitudinales ($k_r = 0$). Déterminez la relation de dispersion. En déduire que, soumis à des excitations de grandes longueurs d'onde, le nuage est instable et fini par s'effondrer sur lui même. En déduire l'expression de la masse des étoiles dans leur première partie de vie.

Formulaire : $\Delta f(r) = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r f\right)$, $div\left(A\overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{grad}A + A\,div\overrightarrow{B}$

Solution

1. $\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} = q_2\overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r})$ *et* $\overrightarrow{F} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} = m_2\overrightarrow{g_1}(\overrightarrow{r})$ *donc* $\oiint \overrightarrow{g}.\overrightarrow{dS} = -4\pi GM_{int}$ *et* $div\overrightarrow{g} = -4\pi G\rho$.
2. $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \rightarrow \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V \rightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. *Ici,* $\Delta\Psi = 4\pi G\rho$
3. $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\overrightarrow{v}\right) = 0$ *et* $\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P - \overrightarrow{grad}\Psi$
4. *Euler avec* $\overrightarrow{v} = r\Omega\overrightarrow{u_\theta}$: $\Omega\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\Omega\overrightarrow{u_\theta}\right) = -r\Omega^2\overrightarrow{u_r} = -\frac{\partial}{\partial r}\Psi\overrightarrow{u_r}$ *donc* $\Psi = \frac{1}{2}r^2\Omega^2 + cste$ *et avec Gauss :* $\Omega^2 = 2\pi G\rho_0$
5. *A l'ordre 1,*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0 div\left(\overrightarrow{v_1}\right) + \overrightarrow{v_0}.\overrightarrow{grad}\left(\rho_1\right) &= 0 \\
&= \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\partial_z v_1 + \frac{v_0}{r}\partial_\theta\rho_1 \\
\partial_t\overrightarrow{v_1} + \left(\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v_0} + \left(\overrightarrow{v_0}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v_1} &= -\frac{1}{\rho_0}\overrightarrow{grad}P_1 - \overrightarrow{grad}\Psi_1 \\
&= \partial_t\overrightarrow{v_1} + v_1.\partial_z\overrightarrow{v_0} + v_0.\partial_\theta\overrightarrow{v_1} \\
\Delta\Psi_1 &= 4\pi G\rho_1
\end{aligned}$$

6. *En TF*

$$
\begin{aligned}
i\omega\tilde{\rho}_1 - ik_z\rho_0\tilde{v}_1 &= 0 \\
i\omega\tilde{v}_1 &= i\frac{1}{\rho_0}k_z\tilde{P}_1 + ik_z\tilde{\Psi}_1 \\
-k_z^2\tilde{\Psi}_1 &= 4\pi G\tilde{\rho}_1 \\
\tilde{P}_1 &= c_s^2\tilde{\rho}_1
\end{aligned}
$$

soit

$$
\begin{aligned}
\omega\tilde{\rho}_1 - k_z\rho_0\tilde{v}_1 &= 0 \\
\omega\tilde{v}_1 &= \left(\frac{1}{\rho_0}k_z c_s^2 - \frac{4\pi G}{k_z}\right)\tilde{\rho}_1 \\
-k_z^2\tilde{\Psi}_1 &= 4\pi G\tilde{\rho}_1 \\
\tilde{P}_1 &= c_s^2\tilde{\rho}_1
\end{aligned}
$$

7. *Pour avoir une solution autre que triviale, on doit avoir*

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \omega & -k_z\rho_0 \\ \frac{1}{\rho_0}k_z c_s^2 - \frac{4\pi G}{k_z} & -\omega \end{vmatrix} &= 0 \\
\omega^2 &= k_z^2 c_s^2 - 4\pi\rho_0 G
\end{aligned}
$$

Longueur de Jeans : $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J}$ *avec* $k_J^2 = \frac{4\pi\rho_0 G}{c_s^2}$. *Masse de Jeans :* $\frac{4}{3}\pi\lambda_J^3\rho_0 = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi^5}{\rho_0 G^3}\right)^{1/2} c_s^3$.

– –