Mécanique des fluides : fluide parfait (PC*)

——————————————————————————————————————

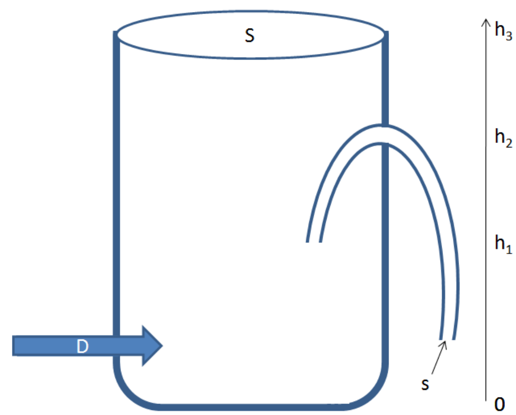
QUESTION DE COURS

Démontrez le théorème de Bernoulli dans le cas d'un liquide parfait, incompressible, etc.

EXERCICE SIPHON

On considère le dispositif représenté ci contre, alimenté par un débit D constant.

Déterminez le comportement du dispositif en fonction de D.



Solution

tant que le niveau est sous h_2, il monte. Quand il atteint h_2, début siphon.

Ligne de courant depuis entrée siphon : $\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho}$. Si juste avant siphon, $v_A = 0$ et $p_A = p_{atm} + \rho g\,(z - h_1)$. Avec $p_B = p_{atm}$ car dans le jet, on a $v_B = \sqrt{2g\,(z-h_1)}$. Le débit de sortie vaut donc $d = v_B s = s\sqrt{2g(z-h_1)}$.

- *Si $s\sqrt{2g(h_3-h_1)} < D$, le dispositif déborde.*
- *Si $s\sqrt{2g(h_2-h_1)} > D$, le niveau descend jusqu'à z_{min} tel que $s\sqrt{2g(z_{min}-h_1)} = D$*

——————————————————————————————————————

QUESTION DE COURS

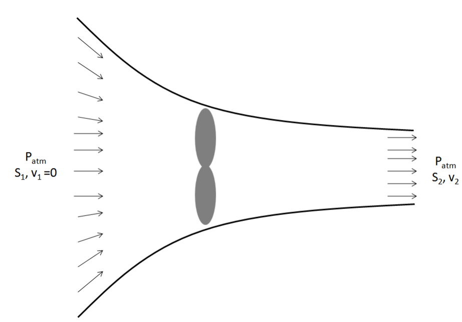
Démontrez le théorème de Bernoulli dans le cas d'un liquide parfait, incompressible, etc.

EXERCICE HÉLICE

On modélise une soufflerie par le dispositif représenté ci contre.

Dans tout l'exercice, l'air sera supposé être un fluide parfait, homogène et incompressible tant qu'il est suffisamment loin de l'hélice. On ne tiendra pas compte de la pesanteur.

1. Déterminez la différence de pression $P_2 - P_1$ de part et d'autre de l'hélice.
2. En déduire par un bilan de quantité de mouvement la force exercée par l'hélice sur le fluide, puis la puissance fournie par l'hélice.
3. Retrouver ce résultat par des considération énergétiques.



Solution

Bernoulli à gauche et à droite :

$$\frac{p_{atm}}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_{avant}^2}{2} \text{ et } \frac{p_{atm}}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_{apres}^2}{2}.$$

Conservation du débit : $v_{avant} = v_{apres}$ *et on a* $P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$.

Système = système ouvert +ce qui rentre entre t et t+dt + ce qui sort entre t et t+dt.

quantité de mouvement à l'instant t : $\overrightarrow{p_{ouvert}}(t) + S_{avant} v_{avant} dt \rho v_{avant} \overrightarrow{u_x}$

quantité de mouvement à l'instant t+dt : $\overrightarrow{p_{ouvert}}(t+dt) - S_{apres} v_{apres} dt \rho v_{apres} \overrightarrow{u_x}$

et $S_{apres} = S_{avant}$ $v_{apres} = v_{avant}$ *donc* $\frac{dp}{dt} = 0$, *donc*

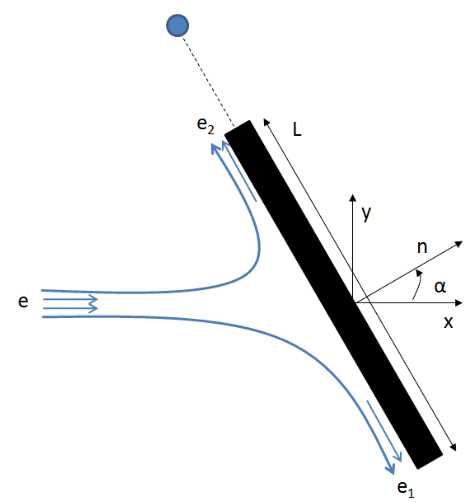
$$F_{helice-jet} = -F_{pression} = (P_2 - P_1)\,S = \frac{1}{2} S \rho v_2^2$$

et puissance = force x vitesse = $\frac{1}{2} S \rho v_{avant} v_2^2 = \frac{1}{2} D_m v_0^2$.

Exercice Jet d'eau sur une plaque

Un jet d'eau de section transervse $e \times l$ arrive avec une vitesse $v_0 \overrightarrow{u_x}$ sur une plaque inclinée de masse M. On considère qu'il donne naissance à deux jets de sections $e_1 \times l$ et $e_2 \times l$ et de vitesse v_1 et v_2. On suppose le liquide parfait et incompressible, son écoulement irrotationnel et on négligera les effets de la pesanteur.

1. Déduire de la conservation de la matière une relation entre e, e_1, e_2, v_0, v_1 et v_2.
2. Déduire du théorème de Bernouilli une seconde relation entre e, e_1 et e_2.
3. En appliquant un bilan de quantité de mouvement à un système convenablement choisi, déterminez l'expression de e_1, e_2 et de la force $\overrightarrow{F}$ appliquée par le jet sur la plaque.
4. On considère à présent que la plaque est attachée à un axe colinéaire à $\overrightarrow{u_z}$ autour duquel elle peut tourner librement. On note d la distance du centre de gravité de la plaque à l'axe. Déterminez l'angle α en négligeant le poids du fluide.



Solution

1. *Conservation de la matière : débit entrant* (lev_0) = *débit sortant* $(le_1v_1 + le_2v_2)$ *donc* $ev_0 = e_1v_1 + e_2v_2$.
2. *Théorème de Bernoulli : dans les jets libres,* $p = p_0$ *donc* $\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$ *car toutes les hypothèses pour théorème général. On a donc* $v_0 = v_1 = v_2$ *soit* $e = e_1 + e_2$ *avec la relation précédente.*
3. *Système = système ouvert +ce qui rentre entre t et t+dt + ce qui sort entre t et t+dt.*
   quantité de mouvement à l'instant t : $\overrightarrow{p_{ouvert}}(t) + lev_0 dt \rho v_0 \overrightarrow{u_x}$
   quantité de mouvement à l'instant t+dt : $\overrightarrow{p_{ouvert}}(t+dt) - le_1v_1 dt \rho v_1 \overrightarrow{n'} + le_2v_2 dt \rho v_2 \overrightarrow{n'}$
   Régime stationaire : $\overrightarrow{p_{ouvert}} = \overrightarrow{cste}$ *donc* $\frac{d\overrightarrow{p_{ferme}}}{dt} = -le_1v_1\rho v_1 \overrightarrow{n'} + le_2v_2\rho v_2 \overrightarrow{n'} - lev_0\rho v_0 \overrightarrow{u_x}$
   - *Forces extérieures :*
     - *Pression :* $lLp_0 \overrightarrow{n}$ *car* $pression_{tube\,ferme} - pression_{contact\,plaque} = 0 - pression_{contact\,plaque}$
       * *Plaque sur jet = - jet sur plaque et comme fluide parfait, effort purement normal :* $-F\overrightarrow{n}$

PFD : $-le_1v_1\rho v_1\overrightarrow{n'}+le_2v_2\rho v_2\overrightarrow{n'}-lev_0\rho v_0\overrightarrow{u_x}=lLp_0\overrightarrow{n}-F\overrightarrow{n}$ *et* $\overrightarrow{u_x}=cos\alpha\overrightarrow{n}-sin\alpha\overrightarrow{n'}$ *et on trouve avec* $v_0=v_1=v_2$

$$\begin{cases}-e_1+e_2+esin\alpha=0\\-le\rho v_0^2cos\alpha=lLp_0-F\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_{1/2}=\frac{1}{2}e\,(1\pm sin\alpha)\\F=lLp_0+le\rho v_0^2cos\alpha\end{cases}$$

4. *TMC : poids :* $M_{poids}=-mgdsin\alpha\overrightarrow{u_z}$. *Force :* $M_F=Fl=l^2Lp_0+l^2e\rho v_0^2cos\alpha$. *Pression extérieure enlève le terme en* l^2Lp_0. *Equilibre :* $l^2Lp_0+l^2e\rho v_0^2cos\alpha=Mgdsin\alpha$ *donc* $tan\alpha\simeq\frac{l^2e\rho v_0^2}{Mgd}$.

– –

EXERCICE FORCE DE PRESSION DUES AU VENT SUR UN HANGAR

On considère un hangar, modélisé par un demi cylindre de rayon R et de longueur L, soumis à un vent dont la vitesse loin du hangar est donnée par $v_\infty\overrightarrow{u_x}$. Sur un côté du hangar, une ouverture infiniment fine est aménagée sur tout la longueur et on note A un point de cette ouverture. Dans le hangar, l'air est au repos et la pression uniforme. On suppose l'air comme un fluide parfait et son écoulement comme incompressible et irrotationnel.

1. Commentez rapidement les hypothèses.
2. Montrez que la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'écoulement peut être écrite comme $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{grad}\phi$ et déterminez l'équation vérifiée par le potentiel ϕ.
3. On cherche des solutions de l'équation précédente par analogie avec l'électrostatique.
   (a) Démontrez qu'en l'absence de charge, le potentiel électrostatique vérifie la même équation que ϕ.
   (b) Rappelez le potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle en tout point de l'espace et tracez en rapidement les lignes de champ.
   (c) Rappelez le potentiel électrostatique crée par un dipole en tout point de l'espace et tracez en rapidement les lignes de champ.
   (d) En déduire qu'on peut chercher ϕ sous la forme
   $$\phi(\overrightarrow{r})=Arcos\theta+B\frac{cos\theta}{r^2}+\frac{C}{r}+D$$
4. Déterminez l'expression du champ de vitesse.
5. En déduire la force de pression Spar unité de longueur exercée par l'air sur le hangar.

Solution

1. *Hypothèses*
2. $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{v}=\overrightarrow{grad}\phi$ *et* $div\overrightarrow{v}=0\Leftrightarrow\Delta\phi=0$
3. *Analogies*
   (a) *Maxwell Gauss :* $div\overrightarrow{E}=-\Delta V=0$
   (b) *Une charge crée* $V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$. *Le champ associé vérifie* $\overrightarrow{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ *donc* $\begin{pmatrix}dr\\rd\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow rE_rd\theta=0\Leftrightarrow\theta=cste$
   (c) *Un dipole crée* $V=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{cos\theta}{r^2}$. *Le champ associé vérifie* $\overrightarrow{E}=\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix}2cos\theta/r^3\\sin\theta/r^3\\0\end{pmatrix}$ *donc* $\begin{pmatrix}dr\\rd\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}E_r\\E_\theta\end{pmatrix}=0$
   $$\frac{dr}{r}=2\frac{cos\theta d\theta}{sin\theta}=2\frac{d(sin\theta)}{sin\theta}$$
   $$\Rightarrow r=r_0sin^2\theta$$
   (d) *Par linéarité, on peut prendre une CL de toutes les solutions précédentes.* $r\,cos\theta=x$ *marche aussi, donc on peut l'ajouter.*

4. $\phi(\vec{r}) = Arcos\theta + B\frac{cos\theta}{r^2} + \frac{C}{r} + D$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} Acos\theta - 2B\frac{cos\theta}{r^3} - \frac{C}{r^2} \\ -Asin\theta - B\frac{sin\theta}{r^3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\infty cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \\ -v_\infty sin\theta\left(1 + \frac{R^3}{r^3}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}(r = \infty) = \overrightarrow{v_\infty}$ *donc* $A = v_\infty$

$v_r(r = R) = 0\,\forall\theta$ *donc* $2B = R^2A$ *et* $C = 0$

5. *Bernouilli donne* $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cste = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}$ *donc* $p(R,\theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2}v_\infty^2\left(1 - 4sin^2\theta\right) = p_\infty + \frac{\rho}{2}v_\infty^2 - 2\rho v_\infty^2 sin^2\theta$.

   Pour $\theta = \pi$, $p(R,\theta) = p_A$ *donc* $p_{ext}(R,\theta) = p_A - 2\rho v_\infty^2 sin^2\theta$.

   Sur un morceau $LRd\theta$, *la force vaut* $p_A LRd\theta\overrightarrow{u_r} - \left(p_A - 2\rho v_\infty^2 sin^2\theta\right)LRd\theta\overrightarrow{u_r}$. *Seule la composante suivant* $\overrightarrow{u_z}$ *compte ie* $2\rho v_\infty^2 sin^2\theta LRd\theta\,(sin\theta)$. *La force totale par unité de longueur vaut donc*

   $2\rho v_\infty^2 R\int_0^\pi sin^2\theta sin\theta d\theta = -2\rho v_\infty^2 R\int_0^\pi\left(1 - cos^2\theta\right)d(cos\theta) = 2\rho v_\infty^2 R\left[-cos\theta + \frac{cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{8}{3}\rho v_\infty^2 R$
