Electromagnétisme : induction(PC*)

Exercice Spires dans un champ magnétique attachées à un ressort

On considère une bobine de masse m constituée de N spires carrées de côté a et attachée à un ressort vertical suivant $\overrightarrow{u_z}$, de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. L'ensemble représente une résistance R et on négligera l'autoinduction. On notera $\overrightarrow{u_x}$ la direction de la normale sortante de la spire.

1. Déterminez la position d'équilibre de la bobine. On prendra la position du centre de la bobine comme référence pour fixer $z = 0$. On suppose dans la suite qu'un champ uniforme $-B_0\overrightarrow{u_x}$ règne dans le demi espace $z > 0$ et que $\overrightarrow{B} = 0$ dans le demi plan $z < 0$.

   On déplace la bobine de sa position d'équilibre d'une distance $L_0 < \frac{a}{2}$ et à la lache avec une vitesse initiale nulle.
2. Etablir l'équation électrique du système.
3. Etablir l'équation mécanique du système.
4. En déduire l'existence de différents modes d'évolution du système en fonction B_0. On distinguera 3 cas : $B_0 < B_c$, $B_0 > B_c$ et $B_0 = B_c$. Résoudre explicitement l'équation du mouvement pour $B_0 = \frac{B_c}{\sqrt{2}}$.
5. Déterminez le bilan énergétique du système.
6. Expliquez qualitativement ce qui change lorsqu'on prend en compte l'autoinductance du circuit.

Solution

Commencer par faire un dessin, ORIENTER le dessin

1. *Position d'équilibre :* $0 = mg - k(z_{eq} - l_0)$ *donc* $z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$. *(Vérifier le signe de la force de rappel en faisant tendre z vers* $\pm\infty$*)*
2. $\phi = -NB_0az$ *donc* $e = NB_0a\dot{z} = Ri$ *(Attention de bien multiplier par le nombre de spires !)*
3. *PFD à la spire dans R labo galiléen :* $m\ddot{z} = -k(z - l_0) - NaIB_0 + mg$ *en calculant la force de laplace* $\oint i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = -NaIB_0\overrightarrow{u_z}$. *Avec le changement de variable* $Z = z - z_{eq}$, *on obtient* $m\ddot{Z} = -kZ - NaIB_0$ *(astuce systématique avec les ressorts pour retirer les termes constants dans l'équa diff)*
4. *on a donc* $\ddot{z} + \frac{N^2a^2B_0^2}{mR}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$

   $\Delta = \left(\frac{N^2a^2B_0^2}{mR}\right)^2 - 4\omega_0^2$. *On pose* B_c *tel que* $\Delta(B_c) = 0$: $B_c = \sqrt{\frac{2\omega_0 mR}{N^2a^2}}$. *On a donc* $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{B_0^4}{B_c^4} - 1\right)$ *et on a donc un régime non oscillant pour* $B_0 > Bc$, *critique pour* $B_0 = B_c$ *et oscillant pour* $B_0 < B_c$.
   - *Pour* $B_0 = \frac{B_c}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega_0 mR}{N^2a^2}}$,

     $\Delta = -3\omega_0^2$ *et* $z = e^{-\frac{\omega_0}{2}t}\left(Acos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + Bsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right) = L_0 e^{-\frac{\omega_0}{2}t}\left(cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)\right)$

     car $A = L_0$ *et* $-\frac{\omega_0}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0$
5. $m\ddot{z} = -kz - NaIB_0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kz^2\right) - NaB_0iv$ *en multipliant par* $\dot{z}$

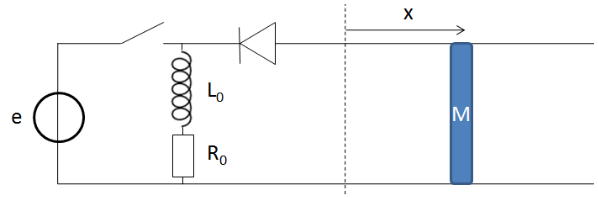
   $NB_0a\dot{z} = Ri \rightarrow NB_0a\dot{z}i = Ri^2$ *en multipliant par* i

   d'où $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kz^2\right) = -Ri^2$
6. $\phi = -NB_0az + Li$ *donc* $e = NB_0a\dot{z} - L\frac{di}{dt} = Ri$

   $m\ddot{z} = -kz - NaiB_0$ *donc* $NB_0a\ddot{z} = L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} = -k\dot{z} - Na\frac{di}{dt}B_0 = -\frac{k}{NB_0a}\left(Ri + L\frac{di}{dt}\right) - Na\frac{di}{dt}B_0$ *ie* $L\frac{d^2i}{dt^2} + \left(R + NaB_0 + \frac{kL}{NB_0a}\right)\frac{di}{dt} + \frac{kR}{NB_0a}i = 0$

Exercice Canon Gauss

On considère le montage ci contre : deux rails parallèles de longueur D sont séparés d'une distance l et reliés par un mobile de masse M. On repère la position du mobile par son abscisse x et on note $R(x) = R'x$ et $L(x) = L'x$ la résistance et l'inductance que représentent ce dispositif.



Initialement, le mobile est au repos en $x = 0$, l'interrupteur est fermé et l'alimentation est gérée par un générateur idéal de tension relié à une bobine d'inductance L_0 et à une résistance R_0. Lorsque le régime stationnaire est atteint, on ouvre l'interrupteur.

1. Décrivez qualitativement le comportement de l'intensité dans le circuit, jusitifiez le rôle de la bobine et expliquez le fonctionnement du dispositif.
2. Donnez l'équation électrique du circuit.
3. On admet que la force subie par le mobile s'exprime sous la forme $\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}L'I^2\overrightarrow{u_x}$. Etablir l'équation mécanique et donnez l'ensemble des conditions initiales.
4. Etablir et interprêtez l'équation
$$\frac{1}{2}L_0I_0^2 - \frac{1}{2}L_0I^2(t) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L'x(t)I^2(t) + \int_0^t dt'\left((R_0 + R'x(t'))\,I^2(t')\right)$$
5. On suppose que l'inductance L_0 est très grand devant les autres paramètres du problème. Justifiez l'approximation $I(t) = I_0$. En déduire le temps d'expulsion du projectile et sa vitesse de sortie pour $M = 3\,10^{-3}kg$, $D = 3m$, $L' = 4\,10^{-7}H\,m^{-1}$, $e = 3\,10^3$, $R_0 = 10^{-2}\Omega$

— —

Question de cours

On considère une spire de rayon a placée à une distance d d'un moment magnétique $\overrightarrow{M} = M\overrightarrow{u_z}$. Déterminez le flux magnétique du dipole au travers de la spire.

Exercice Moment cinétique du champ magnétique

On considère une coquille sphérique isolante de rayon a_0, de masse m et de moment d'inertie I, uniformément chargée en surface avec une densité σ. Un moment magnétique $\overrightarrow{M} = M\overrightarrow{u_z}$ est placé au centre de la coquille. On fais passer progressivement le dipole de sa valeur initiale à 0.

1. Justifiez l'apparition d'un champ électrique en tout point de la coquille. On admettra que ce champ est de la forme $\overrightarrow{E} = E(\theta)\overrightarrow{u_\varphi}$.
2. On repère un point $M = (a_0, \theta, \varphi)$ sur la coquille. Calculez le champ électrique induit au point M.
3. En déduire la force appliquée sur l'élement de surface compris entre $\theta, \varphi\, et\, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi$. Expliquez pourquoi le moment $\delta\overrightarrow{\Gamma}$ de la force appliquée sur l'ensemble de la bande comprise entre θ et $\theta + d\theta$ est suivant $\overrightarrow{u_z}$. Déterminez son expression. En déduire l'expression du moment de la force totale exercée par le dipole sur la coquille.
4. En déduire la vitesse angulaire de la coquille lorsque le moment dipolaire est complètement annulé. Commentez le résultat obtenu.

Solution

Le champ électrique au point M est créé par la variation du moment dipolaire. Considérons une spire d'axe $\overrightarrow{u_z}$ contenant M. Le flux du dipole au travers de cette spire vaut $\phi(\theta) = \frac{\mu_0 M}{2a_0 sin\theta} sin^3\theta = \frac{\mu_0 M}{2a_0} sin^2\theta$ et $\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 2\pi a_0 sin\theta E(\theta) = -\frac{\mu_0}{2a_0} sin^2\theta \frac{dM}{dt}$ donc $\overrightarrow{E}(\theta) = -\frac{\mu_0}{4\pi a_0^2} sin\theta \frac{dM}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$.

La force exercée sur l'élement de surface compris entre θ, φ et $\theta + d\theta, \varphi + d\varphi$ vaut $d\overrightarrow{F} = dq\overrightarrow{E}(\theta) = \sigma dS\overrightarrow{E}(\theta) = \sigma a_0^2 sin\theta d\theta d\varphi E(\theta)\overrightarrow{u_\varphi}$. Le moment de cette force vaut $\delta^2\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F}$. Par symétrie, on sait que $\delta\overrightarrow{\Gamma} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \delta^2\overrightarrow{\Gamma}$ est suivant $\overrightarrow{u_z}$. On calcul donc $\delta^2\Gamma = \delta^2\overrightarrow{\Gamma}.\overrightarrow{u_z} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F}\right).\overrightarrow{u_z} = \left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{OM}\right).d\overrightarrow{F}$ et avec $\overrightarrow{OM} = a_0 cos\theta\overrightarrow{u_z} + a_0 sin\theta\overrightarrow{u_\rho}$, $\delta^2\Gamma = \sigma a_0^2 sin\theta d\theta d\varphi E(\theta) a_0 sin\theta \left(\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_\rho}\right).\overrightarrow{u_\varphi} = \sigma a_0^3 sin^2\theta d\theta d\varphi E(\theta)$ soit $\delta^2\Gamma = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dM}{dt}\sigma a_0 sin^3\theta d\theta d\varphi$ et en intégrant sur φ, $\delta\Gamma = -\frac{\mu_0\sigma a_0}{2}\frac{dM}{dt} sin^3\theta d\theta$. On a enfin $\Gamma = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\delta\Gamma = \frac{\mu_0\sigma a_0}{2}\frac{dM}{dt}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} sin^2\theta d\left(cos\right.$ $\frac{\mu_0\sigma a_0}{2}\frac{dM}{dt}\int_{cos\theta=1}^{cos\theta=-1}\left(1 - cos^2\theta\right) d\left(cos\theta\right)$

$$= \frac{\mu_0\sigma a_0}{2}\frac{dM}{dt}\left[X - \frac{X^3}{3}\right]_1^{-1} = \frac{\mu_0\sigma a_0}{2}\frac{dM}{dt}\left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{\mu_0\sigma a_0}{2}\frac{dM}{dt}\frac{4}{3} = -\frac{2\mu_0\sigma a_0}{3}\frac{dM}{dt}.$$

Enfin, $\Gamma = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \omega_F = -\frac{2\mu_0\sigma a_0}{3I}\left(0 - M_0\right) = \frac{\mu_0\sigma M_0}{ma_0^2}$

— —

Question de cours

On considère une spire de rayon a placée à une distance d d'un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\overrightarrow{u_z}$. Déterminez le flux magnétique du dipole au travers de la spire.

Exercice Chute d'un aimant dans un tube métallique

On lache un aimant de masse m doté d'un moment dipolaire $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ dans un tube de rayon a, d'épaisseur e et de hauteur h. On note γ la conductivité électrique du tube.

1. On repère un point P du tube par l'angle polaire α. Déterminez la densité volumique de courant $\overrightarrow{j}(P, t)$ et le champ électrique $\overrightarrow{E}(P, t)$ en fonction de la vitesse $v(t)$ de l'aimant à l'instant t et de l'angle α.

Solution

Symétries : $\overrightarrow{E} \parallel \overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{j} \parallel \overrightarrow{u_\theta}$.

Champ aimant spire : $\phi_{M\to S} = \frac{\mu_0 M}{2a} sin^3\alpha$, donc $\frac{d\phi_{M\to S}}{dt} = \frac{3\mu_0 M}{2a} sin^2\alpha cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$. Or $\frac{1}{tan\alpha} = \frac{z_P - z_M}{a}$ donc $\frac{d}{dt}\frac{1}{tan\alpha} = -\frac{1}{sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{a}\frac{dz_M}{dt} = -\frac{v}{a}$ et on en déduit $\frac{d\phi_{M\to S}}{dt} = \frac{3\mu_0 M}{2a^2} sin^4\alpha cos\alpha v$. Or $-\frac{d\phi}{dt} = \oint\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 2\pi a E$ donc $\overrightarrow{E}(P, t) = -\frac{3\mu_0 M}{4\pi a^3} sin^4\alpha cos\alpha v\overrightarrow{u_\theta}$. Et comme $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} = -\frac{3\mu_0\gamma M}{4\pi a^3} sin^4\alpha cos\alpha v\overrightarrow{u_\theta}$

EXERCICE LÉVITATION MAGNÉTIQUE D'UNE SPIRE

On considère une petite spire de masse m, de rayon b, de résistance nulle et d'autoinductance L, à une hauteur z au dessus d'un solénoïde de longueur H constitué de spires de rayon $a \gg b$ à raison de n spires par unité de longueur. Initialement, la spire est à l'infini suivant $\overrightarrow{u_z}$ et n'est parcourue par aucun courant.

1. Le solénoïde est alimenté par une intensité constante I_0. Déterminez le champ $\overrightarrow{B_0}(z) = I_0\beta(z)$ en tout point de son axe.
2. Montrez qu'à une distance r de l'axe $\overrightarrow{u_z}$, le champ crée par le solénoïde s'écrit
$$B_r(r,z)\overrightarrow{u_r} + B_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$$
On admet que $B_z(r,z) = B_0(z)$. Montrez que $B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}$.
3. Déterminez le coefficient d'inductance mutuelle $M(z)$ entre le solénoïde et la spire.
4. Justifiez l'apparition d'un courant i lorsque la spire se déplace et montrez que la somme $Li+M(z)I_0$ est constante. En déduire l'expression de l'intensité i en fonction de l'altitude z de la spire.
5. Déterminez la force de Laplace $\overrightarrow{dF} = dF_r\overrightarrow{u_r} + dF_z\overrightarrow{u_z}$ appliquée sur une portion $bd\theta$ de la spire. En déduire la résultante des forces de Laplace sur la spire et montrez qu'elle dérive d'un potentiel $E_p^{mag}(z)$
6. En déduire l'existence d'une position d'équilibre pour la spire en lévitation et étudiez en la stabilité.

Solution

Champ sur l'axe d'une spire : $B_1(z) = \frac{\mu_0 I}{2a}sin^3\alpha$. *La portion comprise entre* z *et* $z+dz$ *comprend* ndz *spires et fournit donc une contribution* $dB = ndzB_1(z)$. *De plus,* $tan\alpha = \frac{a}{z}$ *donc* $z = \frac{a}{tan\alpha}$ *et* $dz = -\frac{a}{sin^2\alpha}d\alpha$ *donc* $dB = -n\frac{\mu_0 I}{2a}sin^3\alpha\frac{a}{sin^2\alpha}d\alpha = -n\frac{\mu_0 I}{2}sin\alpha d\alpha$ *et* $B(z) = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(cos\alpha_1 - cos\alpha_2\right)$ *où* α_1 *est l'angle sous lequel est vu l'entrée du solénoïde et* α_2 *la sortie.*

Petit tube de flux : $0 = \pi r^2 B_z(z+dz) - \pi r^2 B_z(z) + 2\pi r dz B_r(r,z)$ *donc* $B_r = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz} = -\frac{r}{2}I_0\frac{d\beta}{dz}$

Inductance mutuelle : $\phi_{B\to S} = \iint \overrightarrow{B}(z,r).\overrightarrow{u_z}rdrd\theta = B_z(z)\pi b^2 = I_0\beta(z)\pi b^2$ *donc* $M(z) = \beta(z)\pi b^2$

Résistance nulle donc $e = 0 = -\frac{d}{dt}\left(M(z)I_0 + Li(z)\right)$ *et* $i = -\frac{\pi b^2\beta(z)}{L}I_0$

$dF_r = ibB_z d\theta$ $dF_z = -ibB_r d\theta$ *donc* $\overrightarrow{F} = -2i\pi bB_r\overrightarrow{u_z} = -\frac{\pi^2 b^4 I_0^2}{L}\beta(z)\frac{d\beta}{dz}\overrightarrow{u_z}$

$E_p = \frac{\pi^2 b^4 I_0^2}{L}\frac{\beta^2(z)}{2}$

$E_{p,totale} = \frac{\pi^2 b^4 I_0^2}{L}\frac{\beta^2(z)}{2} + mgz$. *Equilibre :* $0 = \frac{\pi^2 b^4 I_0^2}{L}\beta(z)\beta'(z) + mg$.

Cours *champ dipole spire*

On assimile le dipole à une spire de surface S_M *parcourue par une intensité* i_M *telle que* $\overrightarrow{M} = i_M\overrightarrow{S_M}$. *D'après la définition de l'inductance mutuelle,* $\phi_{M\to S} = Mi_M$ *et* $\phi_{S\to M} = Mi_S$. *On cherche à calculer* M. *Imaginons pour cela que la spire soit parcourue par un courant* i_S. *Le champ créé sur l'axe de la spire vaut alors* $B = \frac{\mu_0 i_S}{2a}sin^3\alpha$. *On a donc* $\phi_{S\to M} \simeq BS_M = \frac{\mu_0 i_S}{2a}sin^3\alpha S_M$ *donc* $M = \frac{\mu_0}{2a}sin^3\alpha S_M$ *et* $\phi_{M\to S} = \frac{\mu_0}{2a}sin^3\alpha S_M i_M = \frac{\mu_0 M}{2a}sin^3\alpha$.