Optique ondulatoire : interférences (PC*)

QUESTION DE COURS

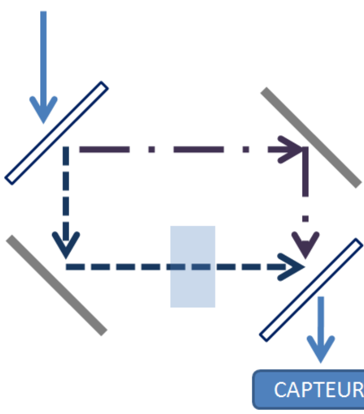
Rappelez le modèle utilisé pour décrire les interférences optiques.

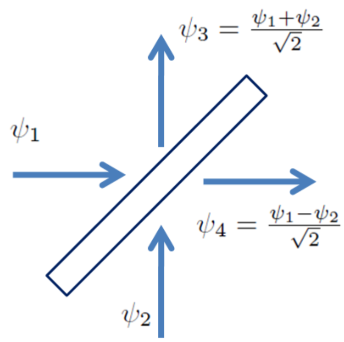
EXERCICE INTERFÉRENCE AVEC DES FONCTIONS D'ONDE (ANALOGIE AVEC LA MÉCANIQUE QUANTIQUE)

En mécanique quantique, l'état d'un système est décrit par un fonction ψ appelée fonction d'onde, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Les fonctions d'ondes sont additives : si une voie donne une fonction d'onde ψ_1 et une autre voie une fonction d'onde ψ_2, les deux voies ensembles donnent une fonction d'onde $\psi = \psi_1 + \psi_2$.
2. La probabilité de détecter une particule est donnée par le module carré de sa fonction d'onde $|\psi|^2$.
3. La propagation d'une particule libre se traduit par une phase sur sa fonction d'onde : si une particule d'impulsion p va de A à B, on a $\psi(B) = \psi(A)e^{-i\frac{p.AB}{\hbar}}$.

On considère un interféromètre de Mach Zehnder représenté sur la figure ci dessous.





A l'entrée du dispositif, on envoie des neutrons d'impulsion p préparés dans le même état ψ_0. Le fonctionnement de la lame séparatrice est expliqué sur le schéma ci dessus. Un retard de longueur e est imposé à la voie 2 et on tiendra pas compte des effets de réflexion et de transmission sur cette lame supplémentaire. La lame de sortie correspond à la voie 4 du schéma.

1. Calculez la différence de marche entre les deux voies.
2. Calculez la fonction d'onde finale.
3. Calculez la probabilité d'observer un neutron au bout du dispositif.

Solution

On injecte une fonction d'onde ψ_0. En notant L la distance entre entrée et sortie, on obtient

$$\psi_1(out) = \psi_1(in)e^{-i\frac{pL}{\hbar}} = \frac{\psi_0}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{Lp}{\hbar}}$$

$$\psi_2(out) = \psi_2(in)e^{-i\frac{(L+e)p}{\hbar}} = -\frac{\psi_0}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{p(L+e)}{\hbar}}$$

et $\psi_{out} = \frac{\psi_1(out)-\psi_2(out)}{\sqrt{2}} = \frac{\psi_0}{2}\left(e^{-i\frac{Lp}{\hbar}} + e^{-i\frac{(L+e)p}{\hbar}}\right)$*, donc*

$$
\begin{aligned}
|\psi_{out}|^2 &= \frac{|\psi_0|^2}{4}\left(e^{-i\frac{Lp}{h}} + e^{-i\frac{(L+e)p}{h}}\right)\left(e^{+i\frac{Lp}{h}} + e^{+i\frac{(L+e)p}{h}}\right)\\
&= \frac{|\psi_0|^2}{4}\left(1+e^{-i\frac{(L+e)p}{h}}e^{+i\frac{Lp}{h}} + e^{-i\frac{Lp}{h}}e^{+i\frac{(L+e)p}{h}} + 1\right)\\
&= \frac{|\psi_0|^2}{4}\left(2 + e^{-i\frac{ep}{h}} + e^{+i\frac{ep}{h}}\right)\\
&= \frac{|\psi_0|^2}{2}\left(1 + cos\frac{pe}{h}\right)
\end{aligned}
$$

Question de cours

On éclaire un écran percé de deux trous supposés ponctuels placés en $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$ avec une source monochromatique, située à l'infini sous une incidence θ_0. On place un écran dans le plan focal d'une lentille de distance focale f' paralèllement aux deux trous. Déterminez l'éclairement en tout point de l'écran.

Exercice Téléscope

On construit un téléscope avec le montage précédent. La lumière, toujours supposée monochromatique, vient d'une étoile située à l'infini et supposée ponctuelle. On considère que le dispositif est éclairé par deux étoiles de même intensité et de même longueur d'onde, une sous incidence normale, une sous incidence θ_0.

1. Déterminez la figure d'interférence en tout point de l'écran.
2. Déterminez le plus petit écart angulaire entre les étoiles pour lequel on obtient un brouillage de la figure.
3. Quel est l'intérêt de ce montage par rapport à un téléscope optique classique ?

Question de cours

On éclaire un écran percé de deux trous supposés ponctuels placés en $z = \frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$ avec une source monochromatique d'intensité I_0, située à l'infini sous une incidence θ_0. On place un écran dans le plan focal d'une lentille de distance focale f' paralèllement aux deux trous. Déterminez l'éclairement en tout point de l'écran.

Exercice Interférences en lumière polychromatique

1. On considère à présent que la source émet deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 avec la même intensité I_0. Déterminez l'intensité obtenue en tout point de l'écran.
2. On considère à présent que la source émet un spectre continu entre λ_1 et λ_2 avec une densité spectrale $i = \frac{I_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Déterminez l'intensité obtenue en tout point de l'écran.

Question de cours

On considère deux sources S_1 et S_2 qui émettent toutes deux une onde monochromatique de même amplitude. Exprimez l'intensité mesurée en un point M donné (Formule de Fresnel).

Exercice Interférence avec des ondes accoustiques

Une salle de théatre génère, de part et d'autre des coulisses situées derrière la scène, une onde sonore. Pour le bien de la cause, on assimilera les coulisses à un tunnel de longeur L et les ondes sonores à des ondes planes monochromatiques de pulsation ω. On a donc deux sources, situées en $x = 0$ et en $x = L$, et qui émettent respectivement un signal d'amplitude $s_1 cos(\omega t)$ et $s_2 cos(\omega t + \varphi)$. En considérant que l'oreille humaine n'est sensible qu'à la valeur quadratique moyenne de l'amplitude sur un grand nombre de période, déterminez l'intensité sonore en tout point des coulisses.

Solution

On envoie $s_1 cos\omega t$ depuis $x = 0$ et $s_2 cos\omega t + \varphi$ depuis $x = L$.

Le signal perçu en x à l'instant t a été émis à l'instant $t - \frac{x}{c}$ par la source en 0 et à $t - \frac{L-x}{c}$ par la source en L. La somme donne donc

$$s(x,t) = s_1 cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) + s_2 cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(L-x) + \varphi\right).$$

L'intensité perçue est donnée par $I = \left\langle |s(x,t)|^2 \right\rangle_T$

$$= \left\langle s_1^2 cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) + s_2^2 cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(L-x) + \varphi\right) + 2 s_1 s_2 cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(L-x) + \varphi\right)\right\rangle$$

$$= I_1 + I_2 + 4\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\left\langle cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(L-x) + \varphi\right)\right\rangle_T$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\left\langle cos\left(\left[\omega t - \frac{\omega}{c}x\right] + \left[\omega t - \frac{\omega}{c}(L-x) + \varphi\right]\right) + cos\left(\left[\omega t - \frac{\omega}{c}x\right] - \left[\omega t - \frac{\omega}{c}(L-x) + \varphi\right]\right)\right\rangle_T$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2} cos\left(\frac{\omega}{c}(L-2x) - \varphi\right)$$

QUESTION DE COURS :

Cohérence temporelle.

EXERCICE MODÈLE DES TRAINS D'ONDE

On fait interférer deux ondes issues d'une même source. Pour rendre compte des sauts de phases aléatoires des émissions atomiques, on considère le modèle des trains d'onde : en tout point M, le signal peut s'écrire

$$s(M,t) = S_0 cos\left(\omega t + \varphi(M) + \phi\right)$$

où $\varphi(M)$ ne dépend que du chemin parcouru par l'onde depuis sa source et ϕ est une variable aléatoire qui prend une valeur dans $[0, 2\pi]$ au bout d'une durée τ.

1. Deux ondes, émises par la même source, ont parcouru des chemins différents avant d'atteindre le point M. En quoi leurs expressions au point M sont elles différentes ? Exprimez l'onde scalaire totale au point M, en négligeant les effets d'atténuation.
2. On place en M un détecteur sensible à la valeur moyenne du carré du signal $I = \left\langle |s(M,t)|^2 \right\rangle_t$ sur un très grand nombre de périodes. Donnez l'expression de I en supposant que les deux ondes ont la même pulsation ω et présente une différence de marche δ due à la différence entre les chemins parcourus. On fera apparaitre la valeur moyenne d'un terme ne dépendant que de ϕ_1, ϕ_2 et δ.

   On s'intéresse à présent au terme croisé de l'expression obtenue.
3. A quelle condition sur ϕ_1 et ϕ_2 ce terme est il non nul ? En déduire
   (a) Une relation entre δ et τ nécessaire à la présence d'interférences ?
   (b) La raison pour laquelle deux ondes issues de sources indépendantes ne peuvent pas interférer.

Question de cours

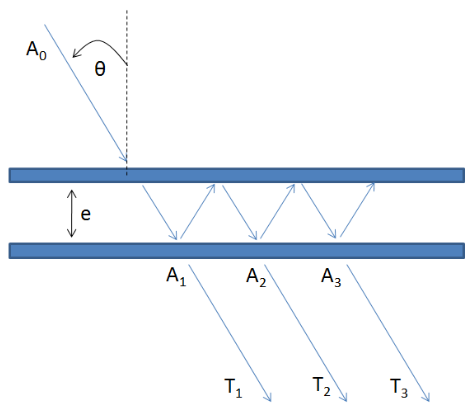
On considère deux sources ponctuelles, monochromatiques et cohérentes, situées en $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$ par rapport à un point O de référence. On place un écran dans le plan focal d'une lentille de distance focale f' perpendiculairement aux deux sources. Déterminez l'éclairement en tout point de l'écran.

Exercice Interféromètre de Fabry-Pérot.

On considère le dispositif interférométrique suivant : deux miroirs semi réfléchissants identiques, de coefficient r de réflexion en amplitude et t de transmission en amplitude, séparés d'une distance e, sont éclairés par un rayon incident d'amplitude A_0 et d'angle d'incidence θ. On note A_i l'amplitude du i^{ieme} rayon émergeant à la sortie du dipositif et T_i son amplitude lors de l'observation à l'infini.

- Exprimez l'amplitude du sortie A_1 en fonction de A_0, r, t, e et θ ; puis l'amplitude A_i en fonction de A_{i-1} et des mêmes grandeurs. En déduire l'expression de A_i en fonction de A_0.
- Exprimez le déphasage entre T_i et T_{i-1}. En déduire le déphasage entre T_i et T_1, puis la relation

$$T_n = A_0 e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}2a\cos\theta}\frac{t^2}{r^2}\left(r^2 e^{2ia\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta}\right)^n$$



- Exprimez l'amplitude résultante à l'infini. En déduire que l'intensité totale se met sous la forme
$$I_{tot} = I_0\frac{1}{1+\mathcal{F}sin^2\left(\frac{2a\pi}{\lambda}\cos\theta\right)},$$
où $\mathcal{F}$ est la finesse de la cavité, à exprimer en fonction du coefficient de réflexion en amplitude des miroirs r. On pourra utiliser la relation $r^2 + t^2 = 1$.
- Quelle figure d'interférence observe-t-on à l'infini ?