Mécanique du solide (PC*)

Exercice Chute d'une tartine

On cherche à étudier la chute d'un pavé de dimensions $2a \times b \times c$ avec $c \ll a, b$ et de masse M posé sur le bord d'une table de hauteur h. On note G son centre de gravité. On décompose son mouvement en deux parties.

1. Le centre de gravité étant éloigné d'une distance δ du bord de la table, le pavé suit un mouvement de rotation autour de l'axe $\overrightarrow{u_z}$ passant par son point de contact O avec la table jusqu'à ce que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Montrez que la vitesse angulaire du pavé durant cette phase vérifie la relation
$$\omega^2 = \omega_0^2 sin\theta$$
On donne le moment d'inertie du pavé par rapport à $(G, \overrightarrow{u_z})$: $\frac{1}{3}Ma^2$.
2. Le pavé subit ensuite une chute libre. Déterminez le côté sur lequel tombe le pavé. En déduire la validité de la loi de Murphy.

Solution

1. *TMC par rapport à O :* $L = L^* + OG \wedge M\overrightarrow{v}(P) = \frac{a^2}{3}M\dot{\theta} + M\delta\delta\dot{\theta}$ *d'où* $\left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)M\ddot{\theta} = M_{poids} + M_{reaction} = Mg\delta cos\theta$ *car la réaction s'applique en O*
En multipliant par $\dot{\theta}$, $\left(\frac{a^2}{3} + \delta^2\right)\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2g\delta\frac{dsin\theta}{dt} \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g\delta}{\left(\frac{a^2}{3}+\delta^2\right)}sin\theta = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}sin\theta$ *donc au moment de la chute,* $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}} = \omega_0$.
2. *Chute libre :*
   (a) *PFD :* $M\ddot{z_G} = Mg$ *donc* $x_G = y_G = 0$ $z_G = \frac{1}{2}gt^2$. *La tartine est à une distance a du sol pour* $t_c = \sqrt{\frac{2(h-a)}{g}}$. *Son côté de chute est alors déterminé (elle ne peut plus se retourner.*
   (b) *TMC :* $L = L^* = \frac{a^2}{3}M\dot{\theta}$ *et* $M_{poids}(G) = 0$ *donc* $\theta = \omega_0 t + \frac{\pi}{2}$ *et* $\theta_{sol} = \pi/2 + \sqrt{\frac{h-a}{a}\frac{12\eta}{1+3\eta^2}}$

Exercice Roue sur un plan incliné

On considère un disque de masse M, de rayon R et de moment d'inertie $I = \frac{1}{2}MR^2$ posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal.

1. Déterminez le mouvement du cylindre ainsi que son énergie cinétique en considérant qu'il roule sans glisser sur le plan. On notera μ le coefficient de frottement entre le sol et la roue.
2. Déterminez le mouvement du cylindre ainsi que son énergie cinétique en considérant qu'il glisse sans rouler sur le plan.

Solution

- *Roulement sans glissement :* $v_{sol}(I \in roue) = v_{sol}(I \in sol) = 0$ *or* $v_{sol}(I \in roue) = v_{sol}(G \in roue) + \Omega \wedge GI = \dot{x} + R\dot{\theta}$ *donc* $\dot{x} = -R\dot{\theta}$.
  - *TMC :* $\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right) = M_{Poids} + M_{normal} + M_{tangentielle} \Leftrightarrow I\ddot{\theta} = RT$ *donc* $T = -\frac{I\ddot{x}}{R^2} = -\frac{M}{2}\ddot{x}$
  - *PFD :* $\begin{cases} M\ddot{x} = Mgsin\alpha + T \\ 0 = -Mgcos\alpha + N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\ddot{x} = Mgsin\alpha - \frac{M}{2}\ddot{x} \\ N = Mgcos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{2}{3}gsin\alpha \\ N = Mgcos\alpha \end{cases}$ *d'où* $x = \frac{t^2}{3}gsin\alpha$ *et* $\theta = -\frac{t^2}{3R}gsin\alpha$
  - *Energie cinétique :* $E_C = E_C^* + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{3}{4}M\left(\frac{2}{3}gsin\alpha t\right)^2 = \frac{1}{3}Mg^2sin^2\alpha t^2$
  - *Condition de non glissement :* $T < fN \Leftrightarrow \frac{1}{3}Mgsin\alpha < Mgcos\alpha \Leftrightarrow tan\alpha < 3f$
- *Roulement avec glissement :*
  - *TMC :* $\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right) = M_{Poids} + M_{normal} + M_{tangentielle} \Leftrightarrow I\ddot{\theta} = 0$ *donc* $\theta = 0$
  - *PFD :* $\begin{cases} M\ddot{x} = Mgsin\alpha \\ 0 = -Mgcos\alpha + N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\ddot{x} = Mgsin\alpha \\ N = Mgcos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = gsin\alpha \\ N = Mgcos\alpha \end{cases}$ *d'où* $x = \frac{t^2}{2}gsin\alpha$ *et* $\theta = 0$
  - *Energie cinétique :* $E_C = E_C^* + \frac{1}{2}mv_G^2 = 0 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{2}gsin\alpha t\right)^2 = \frac{1}{8}Mg^2sin^2\alpha t^2$

———————————————————————————————————————

Exercice Roulement à billes

On considère un cylindre C_1 de rayon r_1 en rotation à la vitesse angulaire Ω_1 autour de son axe de symétrie $\overrightarrow{u_z}$ dans le référentiel d'étude R supposé galiléen. Un second cylindre creux C_2, de rayon r_2, coaxial au premier, trourne autour du même axe à la vitesse Ω_2. Entre les deux se trouve une bille B de diamètre $d = r_2 - r_1$. On note $J_1 \in C_1$ et $I_1 \in B$ les points de contacts entre la bille et le cylindre 1 ; on note $J_2 \in C_2$ et $I_2 \in B$ les points de contact entre la bille et le cylindre 2.

1. On suppose que la bille roule sans glisser entre les deux cylindres. En déduire les relations entre $\overrightarrow{v_R}(J_1)$, $\overrightarrow{v_R}(J_2)$, $\overrightarrow{v_R}(I_1)$ et $\overrightarrow{v_R}(I_2)$.
2. En déduire l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v_R}(I_1)$ du point I_1 et la vitesse $\overrightarrow{v_R}(I_2)$ du point I_2 dans le référentiel R.
3. En déduire l'expression du vecteur de rotation instantanné $\overrightarrow{\Omega_B}$ de la bille B dans le référentiel R.
4. En déduire la position du centre de rotation instantanné Γ, tel que la vitesse de tout point M de la bille soit donnée par $\overrightarrow{v_R}(M \in B) = \overrightarrow{\Omega_B} \wedge \overrightarrow{\Gamma M}$.
5. Déterminez la vitesse du point C au centre de la bille.

Solution

1. *Dans le ref du labo,* $\overrightarrow{v_R}(I \in B) = \overrightarrow{v_R}(I \in C_1) = R_1\Omega_1\overrightarrow{u_\theta}$ *et* $\overrightarrow{v_R}(J \in B) = \overrightarrow{v_R}(J \in C_2) = R_2\Omega_2\overrightarrow{u_\theta}$
2. *On considère que le mouvement de la bille peut s'écrire comme* $\overrightarrow{v_R}(M \in B) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\Gamma M}$ *où* Γ *est le projeté de* Δ *sur le plan du mouvement.*
3. *On a alors* $\overrightarrow{v_R}(J \in B) = \overrightarrow{v_R}(I \in B) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{IJ}$ *donc* $R_2\Omega_2\overrightarrow{u_\theta} = R_1\Omega_1\overrightarrow{u_\theta} + (R_2 - R_1)\Omega\overrightarrow{u_\theta}$ *donc* $\Omega = \frac{R_2\Omega_2 - R_1\Omega_1}{R_2 - R_1}$.

   Vitesse du centre C : $\overrightarrow{v_R}(C \in B) = \overrightarrow{v_R}(I_1 \in B) + \overrightarrow{\Omega_B} \wedge \overrightarrow{I_1B} = \left(R_1\Omega_1 + \frac{R_2\Omega_2 - R_1\Omega_1}{R_2 - R_1}\frac{R_2 - R_1}{2}\right)\overrightarrow{u_\theta} = \frac{R_1\Omega_1 + R_2\Omega_2}{2}\overrightarrow{u_\theta}$.

   $\overrightarrow{v_R}(I \in B) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{\Gamma I}$ *donc* $R_1\Omega_1 = \Omega(R_1 - r)$ *donc* $r = R_1\left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega}\right) = R_1\left(1 - \frac{\Omega_1 R_2 - \Omega_1 R_1}{R_2\Omega_2 - R_1\Omega_1}\right) = R_1R_2\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{R_2\Omega_2 - R_1\Omega_1}$
4. *Cas particuliers :*
   - $\Omega_1 = 0 \rightarrow \Omega = \Omega_2$ *et* $r = R_1$ *: rotation sur le tour du cylindre 1*
   - $\Omega_2 = 0 \rightarrow \Omega = -\Omega_1$ *et* $r = R_2$ *: rotation sur le tour du cylindre 2*

- $\Omega_1 = \Omega_2 \rightarrow \Omega = \Omega_1 = \Omega_2$ *et* $r = 0$ *: rotation autour du centre du dispositif.*
- $R_1\Omega_1 = R_2\Omega_2 \rightarrow \Omega = 0$ *et* $r = \infty$*: mouvement de translation*

−−−

EXERCICE PENDULE PESANT

On considère un disque de rayon a attaché en son centre C à une barre de longueur l, de centre de gravité G. La barre est attachée au plafond en A par une liaison parfaite. On lache la barre sans vitesse initiale depuis un angle θ_0.

1. On suppose que la barre et le disque ne peuvent pas tourner l'un par rapport à l'autre. Déterminez la période des oscillations.
2. On suppose que le disque est à présent libre de tourner par rapport à la barre et on considère la liaison entre les deux comme parfaite. On donne au disque une vitesse angulaire initiale $\dot{\varphi}_0$. Déterminez la période des oscillations.

Données

Moment du disque pour $(C, \overrightarrow{u_z})$ *:* $\frac{1}{2}Ma^2$ *pour* $(A, \overrightarrow{u_z})$*:* $\frac{1}{2}Ma^2 + Ml^2$
Moment de la tige pour $(G, \overrightarrow{u_z})$ *:* $\frac{1}{12}ml^2$ *pour* $(A, \overrightarrow{u_z})$*:* $\frac{1}{3}ml^2$

Solution

On considère un pendule oscillant autour d'un axe Δ*. On note* $a = d(G, \Delta)$ *et* J_Δ *le moment d'inertie du pendule.*

Difficulté : on ne sait rient de la force $\overrightarrow{R}$ *exercée par l'axe sur le pendule. Liaison idéal* $\Leftrightarrow \Gamma_{liaison} = 0$

TMC : $\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}\left(J_\Delta\dot{\theta}\right) = M = -mgasin\theta$ *car* $\overrightarrow{R}$ *coupe* Δ *donc* $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J_\Delta}sin\theta = 0$

- *Le disque ne peut pas tourner*
  $\frac{d}{dt}L^{sys}_{A,\overrightarrow{u_z}} = \frac{d}{dt}\left(\left(\frac{1}{2}Ma^2 + Ml^2 + \frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}\right) = M_{poids} = -Mglsin\theta - mg\frac{l}{2}sin\theta$ *donc* $\omega_1^2 = gl\frac{M+\frac{m}{2}}{\frac{1}{2}Ma^2+Ml^2+\frac{1}{3}ml^2}$
  et $T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}Ma^2+Ml^2+\frac{1}{3}ml^2}{\left(M+\frac{m}{2}\right)gl}}$
- *Le disque peut tourner (liaison parfaite)*
  Pour le disque
  $\frac{d}{dt}L^{disque}_{C,\overrightarrow{u_z}} = M_{poids} + \Gamma_{liaison} = 0$ *donc* $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$
  Pour l'ensemble
  $L^{sys}_{A,\overrightarrow{u_z}} = L^{tige}_{A,\overrightarrow{u_z}} + L^{disque}_{A,\overrightarrow{u_z}}$ *et avec Koening,* $L^{disque}_{A,\overrightarrow{u_z}} = L^{disque*}_{A,\overrightarrow{u_z}} + \left(\overrightarrow{AC} \wedge Ml\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right).\overrightarrow{u_z} = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\varphi}_0 + Ml^2\dot{\theta}$
  donc $L^{sys}_{A,\overrightarrow{u_z}} = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\varphi}_0 + Ml^2\dot{\theta} + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}$ *et par le TMC*
  $\frac{d}{dt}L^{sys}_{A,\overrightarrow{u_z}} = \left(Ml^2 + \frac{1}{3}ml^2\right)\ddot{\theta} = M_{poids} = -Mglsin\theta - mg\frac{l}{2}sin\theta$ *donc* $\omega_2^2 = gl\frac{M+\frac{m}{2}}{Ml^2+\frac{1}{3}ml^2}$ *et* $T = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{1}{3}m}{M+\frac{m}{2}}\frac{l}{g}}$

−−−

Cours

- Dans un solide indéformable, $\overrightarrow{v}(B \in S) = \overrightarrow{v}(A \in S) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$.
- Condition de non glissement : $\overrightarrow{v_R}(I \in S) = \overrightarrow{v_R}(I \in S')$
- Théorèmes de Konig : $\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{L^*} + \overrightarrow{AG} \wedge M\overrightarrow{v_G}$ & $E_c = E_c^* + \frac{1}{2}Mv_G^2$.