Electromagnétisme dans les milieux diélectriques (PC*)

Question de cours

Rappelez à quoi correspond l'hypothèse d'un milieu linéaire, homogène et isotrope et comment ce milieu modifie la forme des équations de Maxwell et de leurs solutions ondes planes.

Exercice Relations de Descartes

On considère en $z = 0$ une interface entre un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2. Une onde plane de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i} = k_i \begin{bmatrix} sin\theta_i \\ 0 \\ cos\theta_i \end{bmatrix}$ et de pulsation ω_i arrive sur le dioptre depuis $z > 0$. On la notera $\overrightarrow{E_i}(\overrightarrow{r}, t) = \overrightarrow{E_{0,i}} e^{i\left(\omega_i t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{r}\right)}$. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\left(\omega_r, \overrightarrow{k_r}\right)$ et à une onde transmise $\left(\omega_t, \overrightarrow{k_t}\right)$.

1. Exprimez ω_i, ω_r et ω_t en fonction de $\overrightarrow{k_i}$, $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ et des indices des milieux.
2. L'interface ne présente pas de charge surfacique. Déterminez les relations de continuité du champ électrique.
3. Montrez qu'on doit avoir $\omega_i = \omega_r = \omega_t$.
4. Montrez que $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ appartiennent au plan d'incidence de l'onde. On les notera $\overrightarrow{k_r} = k_r \begin{bmatrix} sin\theta_r \\ 0 \\ cos\theta_r \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{k_t} = k_t \begin{bmatrix} sin\theta_t \\ 0 \\ cos\theta_t \end{bmatrix}$.
5. Déterminez les relations entre les angles d'incidences et de réflexion.

Solution

Voir rubrique Cours & Analyse

EXERCICE COEFFICIENTS DE FRESNEL

On considère en $z = 0$ une interface entre un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2. Une onde plane transverse magnétique de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i} = k_i \begin{bmatrix} sin\theta_i \\ 0 \\ cos\theta_i \end{bmatrix}$ et de pulsation ω arrive sur le dioptre depuis $z > 0$. On la notera $\overrightarrow{B_i}(\overrightarrow{r}, t) = B_{0,i} e^{i\left(\omega_i t - \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{r}\right)} \overrightarrow{u_y}$. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\left(\omega, \overrightarrow{k_r} = k_r \begin{bmatrix} sin\theta_r \\ 0 \\ cos\theta_r \end{bmatrix}\right)$ et à une onde transmise $\left(\omega, \overrightarrow{k_t} = k_t \begin{bmatrix} sin\theta_t \\ 0 \\ cos\theta_t \end{bmatrix}\right)$. On admettra les relations de Descartes $n_1 sin\theta_i = n_2 sin\theta_t$ et $\theta_i = -\theta_r$.

1. Exprimez ω_i, ω_r et ω_t en fonction de $\overrightarrow{k_i}$, $\overrightarrow{k_r}$ et $\overrightarrow{k_t}$ et des indices des milieux.
2. Ecrire les équations de continuité du champ $\overrightarrow{B}$ et du champ E tangentiel.
3. Exprimez les champs $\overrightarrow{B_i}$, $\overrightarrow{B_r}$ et $\overrightarrow{B_t}$ en fonction des champs $\overrightarrow{E_i}$, $\overrightarrow{E_r}$ et $\overrightarrow{E_t}$ et des indices des milieux.
4. Ecrire les équations vérifiées par les coefficients de réflexion $r = \frac{E_{0,r}}{E_{0,i}}$ et de transmission $t = \frac{E_{0,t}}{E_{0,i}}$.
5. En déduire la valeur de ces coefficients. Commentez.

Solution

Voir rubrique Cours & Analyse

- -

Question de cours

Conditions de raccordement

Exercice Miroir laser

1. On envoie en incidence une onde monochromatique de pulsation ω sur une lame d'indice n comprise entre $z = 0$ et $z = e$. On note $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_y}$ les champs en $z = 0^-$ et $\overrightarrow{E'} = E'\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{B'} = B'\overrightarrow{u_y}$ les champs en $z = e^+$. Exprimez E' et cB' en fonction de E et de cB. En déduire la matrice M_0 telle que $\begin{bmatrix} E' \\ cB' \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} E \\ cB \end{bmatrix}$.
2. On considère à présent une succession de $2N$ couches de milieux diélectriques d'épaisseur e_1 et d'indice n_1 et de milieux d'épaisseur e_2 et d'indice n_2 tels que $n_1e_1 = n_2e_2 = \frac{\lambda}{4}$.
3. Déterminez les matrices M_1 et M_2 qui décrivent le passage de l'onde au travers d'une couche 1 ou d'une couche 2 respectivement. En déduire la matrice qui décrit le passage d'une onde au travers d'une couche 1 puis d'une couche 2.
4. En déduire la relation entre les champs $\begin{bmatrix} E_0 \\ cB_0 \end{bmatrix}$ en $x = 0$ et les champs $\begin{bmatrix} E_t \\ cB_t \end{bmatrix}$ en sortie de dispositif.
5. En considérant les champs en $x = 0$ comme la superposition d'une onde incidente $\begin{bmatrix} E_i \\ cB_i \end{bmatrix}$ et d'une onde réfléchie $\begin{bmatrix} E_r \\ cB_r \end{bmatrix}$, déterminez les coefficients de transmission et de reflexion du dispositif.

Solution

1. $E \rightarrow \Rightarrow \begin{matrix} E_1 \rightarrow \\ E_2 \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow E' \rightarrow$ *et* $B = \frac{E}{c}$, $B_1 = n\frac{E_1}{c}$, $B_2 = -n\frac{E_2}{c}$ *et* $B' = \frac{E'}{c}$.

   Continuité en 0 : $\begin{matrix} E = E_1 + E_2 \\ cB = cB_1 + cB_2 \Leftrightarrow cB = n(E_1 - E_2) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} E_1 = (E + cB/n)/2 \\ E_2 = (E - cB/n)/2 \end{matrix}$

   Continuité en L :
$$\begin{matrix} E' = E_1 e^{ink_0L} + E_2 e^{-ink_0L} \\ cB' = cB_1 e^{ink_0L} + cB_2 e^{-ink_0L} \Leftrightarrow cB' = n(E_1 e^{ink_0L} - E_2 e^{-ink_0L}) \end{matrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{matrix} E' = E cos\,(nk_0L) + i\frac{cB}{n} sin\,(nk_0L) \\ cB' = n\left(iE sin\,(nk_0L) + \frac{cB}{n} cos\,(nk_0L)\right) \end{matrix}$$

   donc $\begin{bmatrix} E' \\ cB' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,(nk_0L) & \frac{i}{n} sin\,(nk_0L) \\ in\,sin\,(nk_0L) & cos\,(nk_0L) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E \\ cB \end{bmatrix}$ *(k_0 en $-k_0$ avec l'autre convention)*

2. *Avec* $nL = \frac{\lambda}{4}$, $\begin{bmatrix} E' \\ cB' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n} \\ in & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E \\ cB \end{bmatrix}$ *et (dans l'ordre inverse des couches rencontrées)*
$$M_2M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_2} \\ in_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{n_1} \\ in_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n_1}{n_2} & 0 \\ 0 & -\frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{c} E_T = E_0\left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N \\ cB_T = cB_0\left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} E_T = (E_i + E_r)\left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N \\ E_T = (E_i - E_r)\left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \tau = (1+r)\left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N \\ \tau = (1-r)\left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \tau - r\left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N = \left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N \\ \tau + r\left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N = \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)^N \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \tau = \frac{2\left(-\frac{n_1}{n_2}\right)^N}{1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}} \\ r = \frac{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}}{1+\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{2N}} \end{array}\right.$$
