Mécanique du solide : ondes mécaniques (PC*)

Corde vibrante

Hypothèses masse linéique uniforme, pas de mouvement horizontaux

T(x)=force exercée par $x' > x$ sur x.

PFD suivant z : $\mu dx \frac{d^2\xi}{dt^2} = T_z(x+dx) - T_z(x) = \frac{\partial T_z}{\partial x}dx$ et $T_z = T_0(x)sin\theta(x) = T_0(x)\frac{\partial \xi}{\partial x}$

PFD suivant x : $0 = T_x(x+dx) - T_x(x) = \frac{\partial T_x}{\partial x}dx$ et $T_x = T_0(x)cos\theta(x) = T_0(x)$ donc $T_0(x) = T_0$ et on a $\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$

Question de cours

On considère une corde de masse linéique μ, tendue suivant la direction $\overrightarrow{u_x}$ et soumise à ses extrêmités à une tension T_0.

En explicitant les hypothèses utilisées, exprimez l'équation de propagation d'un champ de déplacement $\xi(x,t)\overrightarrow{u_y}$ de la corde.

Exercice Deux cordes vibrantes et une masselotte

On considère deux cordes semi-infinies de masse linéique μ_1 et μ_2 raccordées en $x = 0$ et soumises à la même tension T_0.

Une onde incidente $\xi_i(x,t) = \xi_{i,0}cos\left(\omega_i t - k_i x\right), k_i \geq 0$ se propage sur la corde $x < 0$.

1. Dans quel sens se propage l'onde ? Exprimez k_i en fonction de ω_i. Comment appelle t on cette relation ?
2. Cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie $\xi_r(x,t) = \xi_{r,0}cos\left(\omega_r t - k_r x\right)$ et à une onde transmise $\xi_t(x,t) = \xi_{t,0}cos\left(\omega_t t - k_t x\right)$.
   (a) Exprimez ω_r et ω_t en fonction de ω_i.
   (b) Quels sont les signes de k_r et de k_t ? En déduire les expression en fonction de ω_i.
   (c) Exprimez les rapports $R = \frac{\xi_{0,r}}{\xi_{0,i}}$ et $T = \frac{\xi_{0,t}}{\xi_{0,i}}$ en fonction des données du problème. Analyser le résultat.
3. On attache à présent sur le point de jonction une masselotte de masse m contrainte de se déplacer suivant $\overrightarrow{u_y}$. Déterminez les valeurs de R et T. On utilisera la notation complexe.

Question de cours

Soit ψ une fonction de x et de t solution de l'équation de d'Alembert à une dimension $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = 0$.

1. Montrez que $\psi = F\left(x - ct\right)$ et $\psi = G(x+ct)$, où F et G sont deux fonctions C^2 quelconques d'une variable, représentent deux solutions de l'équation de d'Alembert. Les interprèter physiquement.
2. En effectuant le changement de variable $(x,t) \to (u = x - ct, v = x + ct)$, montrez que ψ se met nécessairement sous la forme $\psi(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$.

Exercice Equation de d'Alembert pour une onde sphérique

On cherche à résoudre l'équation de d'Alembert pour une onde sphérique.

1. Rappellez la définition d'une onde sphérique. En déduire l'équation vérifiée par ψ.
2. On pose $U(r,\theta,\varphi,t) = r\psi(r,\theta,\varphi,t)$. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par U.

3. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de ψ. Interprêter.

FORMULAIRE :

En coordonnées sphériques, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

EXERCICE PASSAGE AU CONTINU

On considère une suite infinie de masse m attachées les unes aux autres par des ressorts de longueur à vide a et de constante de raideur k_0. On numérote chacune de ces masses et on repère par $\xi_n(t)$ la déviation de la n^{ieme} masse par rapport à sa position d'équilibre.

1. Exprimez les forces exercées sur la $n^{ième}$ particule. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\xi_n(t)$.
2. On cherche à passer de cette description microscopique à une description continue. Pour ce faire, on introduit un champ $\xi(x,t)$ tel que $\xi(na,t) = \xi_n(t)$. Réécrire l'équation précédente, puis la developper au second ordre en considérant $n \gg 1$.

QUESTION DE COURS :

Une corde de masse linéique μ est tendue avec une tension T_0 entre deux points fixes situés en $x = 0$ et $x = L$.

1. Rappelez l'équation différentielle vérifiée par la déformation $\xi(x,t)$ de la corde.
2. On propose de chercher les solutions sous la forme d'une onde stationnaire. Rappelez la forme générale d'une solution stationnaire et résoudre l'équation de propagation en proposant une famille de solution.
3. Ce résultat est il compatible avec la solution générale $\xi(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$?

EXERCICE ONDES DÉCOMPOSÉES EN MODE DE FOURIER

On pince la corde précédente, en soulevant le point $x = \frac{L}{2}$ à une hauteur h avant de le lacher sans vitesse initiale.

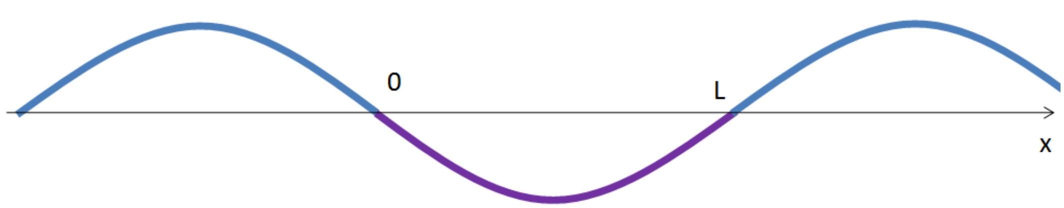
On donne le développement en série de Fourier de la dent de scie : $s(x) = \sum_n \left(A_n cos\frac{2n\pi}{L}x + B_n sin\frac{2n\pi}{L}x\right)$, avec $B_{2p+1} = \frac{(-1)^p 8h}{\pi^2(2p+1)^2}$, $B_{2p} = A_n = 0$. Exprimer le déplacement $\xi(x,t)$ de la corde.

QUESTION DE COURS

Présentez les champs, les équations couplées, les relations de propagation et les relations de dispersion décrivant une corde vibrante et un cable coaxial.

EXERCICE TROIS CORDES ATTACHÉES

On considère trois cordes attachées ensembles. On admettra qu'une onde harmonique s'y propage à la vitesse c_1 sur la première et la troisième portion, c_2 sur la seconde.



Une onde progressive harmonique $\underline{y_i} = y_{i,0}e^{i(\omega t - k_i x)}$ est envoyée depuis $-\infty$. Elle donne naissance à une onde réfléchie $\underline{y_r}$ et une onde transmise $\underline{\xi_i}$, qui a son tour donne naissance à une onde réfléchie $\underline{\xi_r}$ et une onde transmise $\underline{y_t}$. On considérera toutes ces ondes avec la même pulsation.

1. Donnez l'expression générique des différentes ondes ainsi que les relations de dispersions.
2. Déduire de la continuité de la corde en 0 et L une relation entre $y_{i,0}$, $y_{r,0}$, $\xi_{i,0}$ et $\xi_{r,0}$ ainsi qu'une relation entre $y_{t,0}$, $\xi_{i,0}$ et $\xi_{r,0}$.

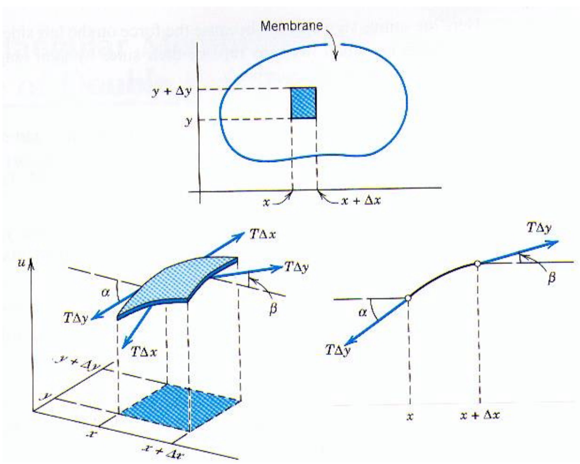
3. Justifiez la continuité de la tension en 0 et L. En déduire deux nouvelles relations entre les amplitudes des différentes ondes.
4. En déduire les rapports de réflexion et de transmission du dispositif.

Question de cours

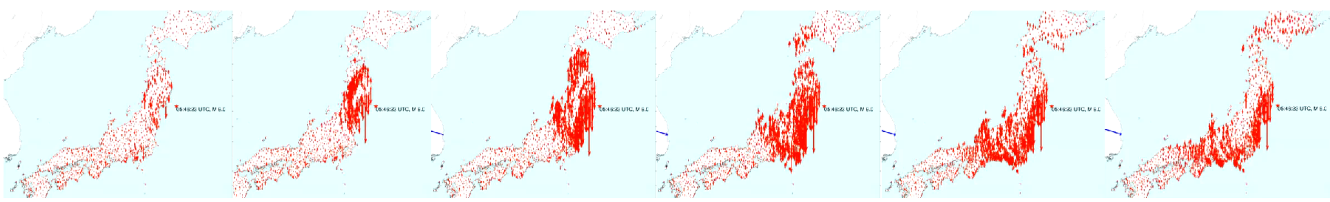
Etablir l'équation de d'Alembert pour un corde de masse linéique μ soumise à une tension T.

Exercice Ondes sur une membrane 2D : modélisation d'une onde sismique

On considère une membrane de masse surfacique σ uniforme. Tout élement de surface dS est soumis à des forces de tensions normales à ses bords et proportionnelles à la longueur du bord. On considère le mouvement exclusivement vertical (on notera $z(x, y)$ l'altitude du point de coordonnées x, y) et on ne tiendra pas compte du poids.



1. Montrez que la norme de la tension est constante sur la membrane.
2. Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le déplacement z et la tension T.
3. En déduire que le déplacement vérifie l'équation $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) z = 0$. Donnez l'expression de la célérité c.
4. Les relevés des 1200 balises GPS du Japon le 11 Mars 2011 permettent d'estimer la vitesse de propagation des ondes S (transversales) à environ $4\,km.s^{-1}$. L'analyse de la composition des croûtes terrestres continentales montrent une densité d'environ 2.5 sur une épaisseur d'environ $30\,km$. En déduire la tension à laquelle est soumise la croûte terrestre.



Solution

- *PFD sur un élément de surface, projeté sur l'axe y :*

$$0 = \mu dS\frac{d^2y}{dt^2} = -T_0(x,y,z)dxcos\theta_y(x,y,z) + T_0(x,y+dy,z)dxcos\theta_y(x,y+dy,z) = -\frac{\partial T_0 cos\theta}{\partial y}dS$$

car $cos \simeq 1$, *donc* T_0 *indep de y, idem pour x.*

- *PFD sur un élément de surface, projeté sur l'axe z :*

$$\begin{aligned}\mu dS\frac{d^2y}{dt^2} &= -T_0(x,y,z)dxsin\theta_y(x,y,z) + T_0(x,y+dy,z)dxsin\theta_y(x,y+dy,z)\\ &\quad -T_0(x,y,z)dysin\theta_x(x,y,z) + T_0(x+dx,y,z)dysin\theta_x(x+dx,y,z)\\ &= T_0\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

avec $sin\theta_x \simeq \theta_x \simeq \frac{\partial z}{\partial x}$ *et idem pour y. On obtient ainsi*

$$\frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

AN : $\mu = 2.5\rho_{eau} * d = 75\,000\,000$ *donc* $T = c^2\mu \simeq 10^{15} Nm^{-1}$