Electronique : cable coaxial (PC*)

Cable coax

Loi des mailles $u(x,t) = u(x+dx,t) + u_{bobine}(x,t) = u(x+dx,t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$ donc $\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial u}{\partial x}$
Loi des noeuds $i(x,t) = i(x+dx) + i_{condensateur} = i(x+dx) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$ donc $\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$ et on en déduit $\left(\partial_x^2 - \frac{1}{\Gamma\Lambda}\partial_t^2\right) u = 0$
Impédance : considérons une solution onde place $u = u_0 e^{j\omega t - kx}$, $i = i_0 e^{j\omega t - kx}$. La relation de dispersion donne $\omega = kc$. Les relations couplées donnent $\Lambda j \omega i_0 = jku_0$ donc $\frac{u_0}{i_0} = \frac{\omega \Lambda}{k} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

QUESTION DE COURS :

On considère un cable coaxial de capacité linéique Γ et d'inductance linéique Λ.

1. Déterminez l'équation vérifiée par le champ de tension $u(x,t)$ et le champ d'intensité $i(x,t)$ en détaillant chaque étape de votre calcul.
2. Rappelez la forme la plus générale de solution de cette équation. On s'intéressera dans la suite de l'énoncé à des solutions de type onde plane harmonique. Rappelez en la définition.
3. Définissez la notion d'*impédance* et déterminez l'impédance caractéristique Z_C de la ligne.

EXERCICE :

On ferme le cable coaxial décrit précédement sur une impédance Z en $x = 0$ et on envoie depuis $-\infty$ une onde plane progressive monochromatique. Les conditions aux limites donnent alors naissance à une onde contrapropageante.

1. Exprimez la forme générale de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, ainsi que des conditions aux limites.
2. Déterminez les coefficients de réflexions en courant et en intensité. Commenter.

QUESTION DE COURS :

On considère un cable coaxial de capacité linéique Γ et d'inductance linéique Λ.

Déterminez l'équation vérifiée par le champ de tension $u(x,t)$ et le champ d'intensité $i(x,t)$ en détaillant chaque étape de votre calcul. Rappelez la forme générale des solutions de cette équation.

EXERCICE EQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

Pour rendre plus réaliste la description du cable, on ajoute en résistance linéique r en série avec l'inductance et une conductance linéique g en série avec la capacité.

1. Dessiner la ligne ainsi décrite et déterminez l'équation différentielle vérifiée par le courant et l'intensité (équation des télégraphistes). Pouvez vous prévoir l'effet de la modification ? Jusifiez alors qualitativement le fait de chercher des solutions sous la forme $i(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-\frac{x}{\delta}}$.
2. Déterminez l'expression de c et de δ en fonction de r, g, Γ et Λ et en déduire une condition sur r, g, Γ et Λ pour qu'une telle solution soit envisageable (condition de Heaviside).
3. Dans l'hypothèse où les conditions de Heaviside sont vérifiées, par analogie avec les deux solutions générales de l'équation de d'Alembert, proposez une autre forme de solution.

Solution

1. $u(x,t) = u(x+dx,t) + rdxi(x,t) + \Lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial u}{\partial x} = ri(x,t) + \Lambda \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + gdxu(x,t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = gu(x,t) + \Gamma \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= rgi + (r\Gamma + g\Lambda)\frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= rgi + (r\Gamma + g\Lambda)\frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

Termes de perte => solutions atténuées.

2. *En injectant* $i = f\left(t - \frac{x}{c}\right)e^{-\frac{x}{\delta}}$, *on trouve*

$$\left(\frac{1}{c^2} - \Gamma\Lambda\right) f'' e^{-\frac{x}{\delta}} + \left(\frac{2}{c\delta} - (r\Gamma + g\Lambda)\right) f' e^{-\frac{x}{\delta}} + \left(\frac{1}{\delta^2} - rg\right) f e^{-\frac{x}{\delta}}$$

On doit donc avoir chacun des termes nul car égalité $\forall x, t$:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{rg}},\ c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}\ \textit{et}\ \frac{4\Lambda\Gamma}{(r\Gamma + g\Lambda)^2} = \frac{1}{rg} \Leftrightarrow r\Lambda = g\Gamma$$

3. *Solution contre propagative* $g\left(t + \frac{x}{c}\right)e^{\frac{x}{\delta}}$.
