Diffusion thermique (PC*)

Question de cours

Etablir l'équation de diffusion de la chaleur dans un milieu de masse volumique ρ, de capacité thermique c et de conduction thermique λ en absence de source.

Exercice Formation de la couche de glace de la banquise

On s'intéresse à la formation d'une couche de glace à la surface de l'eau. En se ramenant à un problème unidimensionnel, on considère une grande quantité d'eau à la température $T_e = 273K$ au contact en $z = 0$ avec de l'air à la température $T_a = 253K$. On note $L(t)$, l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t et on prendra $L(0) = 0$. On note λ la conductivité thermique de la glace, ρ sa masse volumique et l sa chaleur latente massique de fusion. On négligera sa capacité thermique pour simplifier les calculs. Le flux thermique entre l'air et la glace est donné par $d\phi = h\left(T(0,t) - T_a\right)dS$.

1. Rappelez l'équation de diffusion de la température et en déduire le champ de température à tout instant t en fonction de $T(0,t)$ et de $L(t)$.
2. Déduire de la continuité du flux d'énergie en $z = 0$ l'expression de $T(0,t)$ en fonction de $L(t)$.
3. Déterminez la chaleur apportée par un épaississement dL de la couche de glace.
4. En appliquant un bilan d'énergie entre $L(t)$ et $L(t) + dz$ entre les instants t et $t + dt$, montrez que $L\frac{dL}{dt} = \frac{\lambda}{l\mu}\left(T_e - T(0,t)\right)$.
5. En déduire l'évolution de l'épaisseur de la couche de glace.

Solution

Equation de la chaleur $\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c\mu\partial_t T = 0$ *car* $c \simeq 0$ *donc* $T(x,t) = Ax + B = T(0,t) + \left(T_e - T(0,t)\right)\frac{x}{L(t)}$.

La continuité du flux en $z = 0$ *donne* $\lambda\left(T_e - T(0,t)\right)\frac{1}{L} = \alpha\left(T_a - T(0,t)\right)$ *donc* $T(0,t) = \frac{T_e + \frac{hL(t)}{\lambda}T_a}{1 + \frac{hL(t)}{\lambda}}$. *On en déduit* $T_e - T(0,t) = \frac{\frac{hL(t)}{\lambda}}{1 + \frac{hL(t)}{\lambda}}\left(T_e - T_a\right)$.

On se place à une profondeur $L(t)$. *La formation d'une couche d'épaisseur* dL *entraine l'apparition d'une chaleur* δQ *telle que* $\delta Q = dH = ldm = lS\mu dL$. *Par conservation de l'énergie, on a* $\delta Q + Sj_Q dt = 0$ *donc* $j_Q = -\frac{1}{S}\frac{\delta Q}{dt} = -l\mu\frac{dL}{dt}$. *Or la loi de Fourier impose* $j = -\lambda\nabla T$ *donc* $\lambda\frac{T_e - T(0,t)}{L(t)} = l\mu\frac{dL}{dt}$ *donc* $L\frac{dL}{dt} = \frac{\lambda}{l\mu}\left(T_e - T(0,t)\right)$.

On a donc $L\frac{dL}{dt} = \frac{\lambda}{l\mu}\frac{\frac{hL(t)}{\lambda}}{1 + \frac{hL(t)}{\lambda}}\left(T_e - T_a\right)$ *soit* $\left(1 + \frac{hL(t)}{\lambda}\right)\frac{dL}{dt} = \frac{h}{l\mu}\left(T_e - T_a\right)$. *On intègre avec* $L(0) = 0$ *:* $L + \frac{1}{2}\frac{h}{\lambda}L^2 = \frac{h}{l\mu}\left(T_e - T_a\right)t \Leftrightarrow 2\frac{\lambda}{h}L + L^2 = \frac{\lambda}{l\mu}\left(T_e - T_a\right)t$ *et* $L^2 + 2\frac{\lambda}{h}L = \left(L + \frac{\lambda}{h}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{h^2}$ *d'où* $L = \sqrt{\frac{h}{l\mu}\left(T_e - T_a\right)t + \frac{\lambda^2}{h^2}} - \frac{\lambda}{h}$.

Question de cours

Etablir l'équation de diffusion de la chaleur dans un milieu de masse volumique ρ, de capacité thermique c et de conduction thermique λ en absence de source.

Exercice Température sous Terre

On cherche à étudier la propagation de la chaleur à partir de la surface terrestre. On veut donc établir la loi de température $T(z)$ en fonction de la profondeur z en régime stationnaire.

1. La température à la surface de la Terre est donnée par $T(t) = T_0 + T_1 cos\left(2\pi\frac{t}{\tau_1}\right)$ avec $\tau_1 = 1\,an$. Justifiez cette forme et proposez des ordres de grandeur.
2. On cherche une solution complexe de la température $T(z,t) = T_0 + \Theta(z)A(t)$. Justifiez cette forme. Déterminez la fonction $A(t)$ à une constante près.
3. Déterminez l'équation vérifiée par $\Theta(z)$ et la résoudre. Tracez le profile de température. Commentez.
4. On prend à présent une température de surface de la forme $T(t) = T_0 + T_1 cos\left(2\pi\frac{t}{\tau_1}\right) + T_2 cos\left(2\pi\frac{t}{\tau_2}\right)$ avec $\tau_2 = 24h$. Déterminez le champ de température $T(z,t)$. Commentez.

Solution

- *On se place en régime stationnaire : séparation des variables :* $T(z,t) = T_0 + \Theta(z)e^{2i\pi\frac{t}{\tau_1}}$. *Dans l'équation :* $\Theta\partial_t A = \frac{\lambda}{\rho c}A\partial_x^2\Theta$ *donc* $\frac{\partial_t A}{A} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial_x^2\Theta}{\Theta}$ *et égalité de variables indépendantes donc* $= K$. *On a donc* $A(t) = A_0 exp\left(Kt\right)$ *et* $T_0 + \Theta(0)A(t) = T_0 + T_1 e^{\frac{2i\pi t}{\tau_1}}$ *donc* $A(t) = A_0 e^{\frac{2i\pi t}{\tau_1}}$.
- *Par la suite,* $\frac{2i\pi}{\tau_1}\Theta = \frac{\lambda}{\rho c}\partial_x^2\Theta$ *donc* $\Theta(z) = \Theta_0 e^{\sqrt{\frac{2i\pi\rho c}{\lambda\tau_1}}z} + \Theta_1 e^{-\sqrt{\frac{2i\pi\rho c}{\lambda\tau_1}}z} = \Theta_0 e^{(1+i)\sqrt{\frac{\pi\rho c}{\lambda\tau_1}}z} + \Theta_1 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\pi\rho c}{\lambda\tau_1}}z}$. *Seule la deuxième solution est possible et on obtient donc* $T = T_0 + A_0\Theta_0\Theta_1 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\pi\rho c}{\lambda\tau_1}}z} e^{\frac{2i\pi t}{\tau_1}}$ *donc* $T = T_0 + T_1 e^{-\sqrt{\frac{2\pi\rho c}{\lambda\tau_1}}z} cos\left(\frac{2\pi}{\tau_1}t - \sqrt{\frac{2\pi\rho c}{\lambda\tau_1}}z\right)$

Question de cours

Présentez et expliquez la loi de Fourier.

Exercice

On cherche à étudier un dispositif classique de refroidissement en forme d'ailette. Il s'agit d'un parallépipède de dimension $L\times l\times h$ avec $L \gg l \gg h$, de masse volumique ρ et de capacité thermique c, attaché à un dipositif de température T_0 qui impose sa température à l'interface $z = 0$. Le long de l'ailette, le contact de l'air sera modélisé par un flux thermique surfacique sortant $\phi(z,t) = \gamma\left(T(z,t) - T_{atm}\right)$. On posera $T(z,t) = T_{atm} + \Theta(z,t)$. Le courant thermique interne à l'ailette est supposé unidimensionnel.

1. Effectuez un bilan d'énergie entre l'instant t et l'instant $t + dt$ dans la tranche d'ailette comprise entre les abscisses z et $z + dz$.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par le champ de température $\Theta(z,t)$ et la résoudre en régime permanent.
3. Déterminez l'expression de la densité de courant thermique $j(z,t)$. En déduire le flux de chaleur entrant dans l'ailette par l'interface $z = 0$.
4. Calculez le flux thermique total sortant de l'ailette par les surfaces latérales. Commentez.

Solution

- *Bilan d'énergie*
  entrant : $j(z,t)lhdt$*. sortant* $j(z+dz,t)lhdt + 2\gamma\theta(z,t)(l+h)dzdt$*. Présent à l'instant* t *:* $\rho lhdz\, c_v T(z,t)$*. Présent à l'instant* $t+dt$ *:*$\rho lhdz\, c_v T(z,t+dt)$*.*
  Donc $\rho lhdz\, c_v T(z,t+dt) = \rho lhdz\, c_v T(z,t) - j(z+dz,t)lhdt - 2\gamma\theta(z,t)ldzdt + j(z,t)lhdt$
  donc $\rho hc_v\partial_t\theta = -h\partial_z j - 2\gamma\theta$ *et avec* $j = -\lambda\partial_z\theta$*, on obtient* $\rho hc_v\partial_t\theta = \lambda h\partial_z^2\theta - 2\gamma\theta$*. En régime permament,* $\partial_z^2\theta = \frac{2\gamma}{\lambda h}\theta$ *donc* $\theta = Ae^{\eta x} + Be^{-\eta x}$*. Comme on considère* L *très grand, on a* $A = 0$ *et par continuité en 0,* $B = T_0 - T_{atm}$*. On a finalement* $T = T_{atm} + (T_0 - T_{atm})e^{-\eta x}$*.*
- *Par la loi de Fourier,* $j = \sqrt{\frac{2\lambda\gamma}{h}}(T_0 - T_{atm})e^{-\eta x}$ *donc* $\phi_0 = hl\sqrt{\frac{2\lambda\gamma}{h}}(T_0 - T_{atm})$
- *Flux total sortant :* $2(l+h)\gamma\int\theta(z)dz \simeq 2l\gamma\frac{(T_0-T_{atm})}{\eta} = 2l\gamma\sqrt{\frac{\lambda h}{2\gamma}}(T_0 - T_{atm}) = hl\sqrt{\frac{2\lambda\gamma}{h}}(T_0 - T_{atm})$

Question de cours

Insérer ici une question de cours pertinente.

Exercice

On considère une barre de fer de masse volumique ρ, de capacité thermique volumique c, de conduction thermique λ et de dimensions $L\times h\times l$. A l'instant $t = 0$, on la plonge dans un volume d'eau qu'on supposera isotherme à la température T_1. On considérera $l \ll L, h$ et on se ramène à un problème unidimensionnel.

1. Etablir l'équation de diffusion de la chaleur dans le milieu. On supposera la température continue aux bords $-\frac{l}{2}$ et $\frac{l}{2}$.
2. On cherche une solution stationnaire. Proposez une forme générale de solution et déterminez les équations différentielles vérifiées par une telle solution. En déduire la forme générale des solutions stationnaires.
3. Déterminez le champ de température en tout point de la barre et à tout instant en considérant une distribution iniale de température de la forme $T(x,0) = T_0 + \theta_0 sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.
4. On donne la transformée de Fourier d'une porte de longueur L : $s(x) = \sum$. En déduire l'expression du champ de température en tout point de la barre et à tout instant.

QUESTION DE COURS

Présentez et expliquez l'équation de conservation de l'énergie. On explicitera avec soin le notions de flux d'énergie, de vecteur densité d'énergie, de puissance et d'énergie volumique.

EXERCICE

On cherche à modéliser l'équilibre thermique d'une planète. On l'assimile pour cela à une sphère de rayon R, de densité ρ uniforme et de capacité thermique c constante. On suppose le problème à symétrie sphérique. Des désintégrations nucléaires qui ont lieu dans la planète forment une source d'énergie de puissance volumique p_{nuke}. La planète rayonne un flux d'énergie depuis sa surface avec un flux surfacique $\phi_{perte} = \sigma T^4$, où T est la température à la surface de la planète et σ la constante de Stefan. Elle reçoit également un flux surfacique qui provient d'une étoile proche et qu'on notera ϕ_{star}.

1. En faisant un bilan d'énergie, déterminez l'équation différentielle vérifiée par la température dans la planète et explicitez les conditions limites.
2. On se place en régime permanent. Déterminez le champ de température $T(r)$ en fonction de ρ, c, R, p_{nuke} et ϕ_{star}.

Cours *eq de la chaleur*

Sur un volume $dxdydz$, bilan d'énergie pendant dt

énergie dans le volume à l'instant t : $h(x,t)\rho dxdydz$

entrant dans le volume avec $\overrightarrow{dS}$ entrant pendant dt : $\sum \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}dt = j_x(x,t)dydzdt - j_x(x+dx,t)dydzdt = -\frac{\partial j_x}{\partial x}dxdydzdt$

énergie crée dans le volume pendant dt : $\mathcal{P}dtdxdydz$

énergie dans le volume à l'instant t+dt : $h(x,t+dt)\rho dxdydz$

Bilan : $h(x,t+dt)\rho dxdydz = h(x,t)\rho dxdydz - \frac{\partial j_x}{\partial x}dxdydzdt + \mathcal{P}dtdxdydz$ donc $\rho\partial_t h = -\partial_x j_x + \mathcal{P}$.

Premier principe : $dh = cdT$ donc $\partial_t h = c\partial_t T$ et loi de Fourier $j_x = -\lambda\partial_x T$ donc $\partial_t T = \frac{\lambda}{c\rho}\partial_x^2 T + \frac{\mathcal{P}}{\rho}$.