Electromagnétisme dans le vide (PC*)

Question de cours

Démontrez l'équation de Poynting et rappelez la structure d'une onde plane progressive harmonique.

Exercice Interférences entre ondes électromagnétiques

On considère deux ondes planes $\overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r},t)$ et $\overrightarrow{E_2}(\overrightarrow{r},t)$, monochromatiques de pulsation ω, déphasées d'une phase φ l'une par rapport à l'autre et se propageant toutes deux dans la direction $\overrightarrow{u_x}$.

1. Donnez les expressions des champs électriques et en déduire celles des champs magnétiques $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ associés.
2. Calculez les valeurs moyennes temporelles des vecteurs de Poynting $\overrightarrow{\Pi_1}$ et $\overrightarrow{\Pi_2}$ de chacune des ondes en $x = 0$.
3. Calculez la valeurs moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$de l'onde résultante en $x = 0$. Commentez le résultat obtenu.

Solution

$\overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{E_{0,1}}cos\left(\omega t - kx\right)$, $\overrightarrow{E_2}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{E_{0,2}}cos\left(\omega t - kx + \varphi\right)$.

On a $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ *donc on a* $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -ksin\left(\omega t - kx\right)\left(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E_{0,1}}\right)$ *donc* $\overrightarrow{B_1}(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{c}cos\left(\omega t - kx\right)\left(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E_{0,1}}\right)$ *et* $\overrightarrow{B_2}(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{c}cos\left(\omega t - kx + \varphi\right)\left(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E_{0,1}}\right)$.

On en déduit les vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi_1} = \frac{\overrightarrow{E_1} \wedge \overrightarrow{B_1}}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0}cos^2\left(\omega t - kx\right)\left[\overrightarrow{E_{0,1}} \wedge \left(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E_{0,1}}\right)\right]$. *Or* $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{b}\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}\right) - \overrightarrow{c}\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right)$ *et* $\overrightarrow{E_{0,1}}.\overrightarrow{u_x} = 0$ *car* $div\overrightarrow{E} = 0$ *donc* $\overrightarrow{\Pi_1} = \frac{1}{c\mu_0}cos^2\left(\omega t - kx\right)E_{0,1}^2\overrightarrow{u_x}$ *et* $\overrightarrow{\Pi_2} = \frac{1}{c\mu_0}cos^2\left(\omega t - kx + \varphi\right)E_{0,2}^2\overrightarrow{u_x}$.

Leurs valeurs moyennes en x=0 valent $\left\langle\overrightarrow{\Pi_1}\right\rangle = \frac{1}{2c\mu_0}E_{0,1}^2\overrightarrow{u_x}$ *et* $\left\langle\overrightarrow{\Pi_2}\right\rangle = \frac{1}{2c\mu_0}E_{0,2}^2\overrightarrow{u_x}$.

Pour l'onde totale, le vecteur de Poynting vaut $\overrightarrow{\Pi} = \frac{\left(\overrightarrow{E_1}+\overrightarrow{E_2}\right)\wedge\left(\overrightarrow{B_1}+\overrightarrow{B_2}\right)}{\mu_0} = \overrightarrow{\Pi_1} + \overrightarrow{\Pi_2} + \frac{\overrightarrow{E_1}\wedge\overrightarrow{B_2}}{\mu_0} + \frac{\overrightarrow{E_2}\wedge\overrightarrow{B_1}}{\mu_0}$

et $\frac{\overrightarrow{E_1}\wedge\overrightarrow{B_2}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c}cos\left(\omega t - kx\right)cos\left(\omega t - kx + \varphi\right)\overrightarrow{E_{0,1}}\wedge\left(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{E_{0,2}}\right) = \frac{1}{\mu_0 c}cos\left(\omega t - kx\right)cos\left(\omega t - kx + \varphi\right)\left(\overrightarrow{E_{0,1}}.\overrightarrow{E_{0,2}}\right)\overrightarrow{u_x}$ *donc*

$$\overrightarrow{\Pi}(x=0) = \overrightarrow{\Pi_1} + \overrightarrow{\Pi_2} + \frac{2}{\mu_0 c}cos\left(\omega t\right)cos\left(\omega t + \varphi\right)\left(\overrightarrow{E_{0,1}}.\overrightarrow{E_{0,2}}\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{\Pi_1}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{\Pi_2}\right\rangle + \frac{1}{\mu_0 c}cos\left(\varphi\right)\left(\overrightarrow{E_{0,1}}.\overrightarrow{E_{0,2}}\right)\overrightarrow{u_x}$$
