Mécanique des fluides : fluide visqueux (PC*)

QUESTION DE COURS

Modélisation des effets de viscosités d'un fluide

EXERCICE VISCOSIMÈTRE DE COUETTE

On considère deux cylindres concentriques de rayon R_1 et $R_2 > R_1$ et de hauteur $h \gg R_2$. Le premier cylindre est immobile, le second tourne à une vitesse angulaire constante Ω autour de son axe. On remplit l'espace entre les deux cylindres d'un liquide de masse volumique ρ, supposé incompressible et présentant un coefficient de viscosité η. On néglige l'effet de la pesanteur.

1. On suppose $R_2 - R_1 \ll R_1$ et on se place en régime stationnaire. Justifiez $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$. On considérera dans la suite un champ de vitesse $v(r)\overrightarrow{u_\theta}$.
2. Montrez que le champ de vitesse se met nécessairement sous la forme $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$.
3. Déterminez les expressions de A et de B.
4. Déterminez le couple qu'il faut appliquer sur le cylindre central pour qu'il reste immobile.

Pour une fonction de la forme $\overrightarrow{A} = f(r)\overrightarrow{u_\theta}$, le laplacien s'écrit $\Delta\overrightarrow{A} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{f}{r^2}\right)\overrightarrow{u_\theta}$.

Solution

1. *On a par symétrie $v(r)\overrightarrow{u_\theta}$ (et par conservation de la matière, $div\overrightarrow{v} = 0$)*
2. *En régime stationnaire, NS s'écrit $\rho\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = \eta\Delta\overrightarrow{v} - \overrightarrow{\nabla}p = 0$ et $\overrightarrow{\nabla}p.\overrightarrow{u_\theta} = 0$. On cherche $v^\theta = Ar + \frac{B}{r}$. $\left(\frac{\partial^2 v^\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^\theta}{\partial r} - \frac{v^\theta}{r^2}\right) = A\left(0 + \frac{1}{r} - \frac{r}{r^2}\right) + B\left(\frac{2}{r^3} - \frac{1}{r}\frac{1}{r^2} - \frac{1/r}{r^2}\right) = 0$ Equation du deuxième ordre, 2 solutions indépendantes => base des solutions.*
3. *Conditions limites : $AR_1 + \frac{B}{R_1} = 0 \Leftrightarrow B = -AR_1^2$. $AR_2 + \frac{B}{R_2} = R_2\Omega \Leftrightarrow A = \frac{R_2^2\Omega}{R_2^2 - R_1^2}$ et $B = -\frac{R_1^2R_2^2\Omega}{R_2^2 - R_1^2}$.*
4. *Force appliquée au niveau du cylindre R_1 : $d\overrightarrow{F} = \eta\frac{\partial v}{\partial r}dS\overrightarrow{u_\theta} = \eta\left(A - \frac{B}{R_1^2}\right)dS\overrightarrow{u_\theta} = 2\eta AdS\overrightarrow{u_\theta}$. Moment : $2\eta AdSR_1\overrightarrow{u_z}$. Total : $2\eta\frac{R_2^2\Omega}{R_2^2 - R_1^2}2\pi R_1^2 h$. Couple à exercer : $-4\pi\eta h\frac{R_1^2R_2^2\Omega}{R_2^2 - R_1^2}$*

QUESTION DE COURS

On considère un cylindre de rayon R et de longueur L dans lequel s'écoule en régime stationnaire un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. On note Δp la différence de pression entre un bout du tuyau et l'autre. Déterminez le champ de vitesse et de pression dans la conduite ainsi que le débit massique.

EXERCICE ECOULEMENT SUR UN PLAN INCLINÉ

On considère un plan incliné d'un angle α sur lequel se trouve un film de fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. On se place en régime stationaire et on note h la hauteur du film de fluide et $v(x,z)\overrightarrow{u_x}$ sa vitesse.

1. Déterminez le champ de vitesse et de pression en tout point du fluide.
2. Calculez le débit massique de l'écoulement sur une largeur L.

3. Exprimez la puissance développée par les forces de viscosité dans un volume de longueur l, de largeur L et de hauteur h.

Solution

1. *incompressible donc* $div\vec{v} = 0$ *donc* $\partial_x v = 0$ *et on a* $v(z)\vec{u_x}$. *Navier stockes :* $\partial_t v = 0$ *car stationaire et* $\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = 0$ *donc* $\eta\Delta\vec{v} - \vec{\nabla}p + \rho\vec{g} = 0$ *donc* $\begin{cases}\eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g sin\alpha = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g cos\alpha = 0\end{cases}$ *donc* $p(x,z) = \rho g cos\alpha + f(x)$ *et* $p(x,h) = p_0\ \forall x$ *donc* $p(x,z) = p_0 + \rho g cos\alpha(h-z)$ *et* $\partial_z v = -\frac{\rho g}{\eta} sin\alpha z + K$ *et contrainte air-fluide nulle donc* $\partial_z v = -\frac{\rho g}{\eta} sin\alpha(h-z)$ *et* $v = \frac{\rho g sin\alpha}{2\eta}(2hz - z^2) + K'$ *et* $v(0) = 0$ *donc* $K' = 0$.
2. *Débit volumique :* $\iint \rho\vec{v}.\vec{dS} = \frac{\rho g sin\alpha}{2\eta}\rho L(hh^2 - \frac{h^3}{3}) = \frac{\rho^2 g sin\alpha}{3\eta}Lh^3$.
3. *Pour un volume* $dxdydz$, $dP = \vec{dF}.\vec{v} = \eta\Delta v v d\tau = -\eta\frac{\rho g}{\eta}sin\alpha\frac{\rho g sin\alpha}{2\eta}(2hz - z^2)d\tau = \frac{\rho^2 g^2 sin^2\alpha}{2\eta}(z^2 - 2hz)dxdydz$ *donc* $P = \frac{\rho^2 g^2 sin^2\alpha}{2\eta}(\frac{h^3}{3} - hh^2)Ll = -Qglsin\alpha$

Cours écoulement de poiseuille

La divergence en coordonnée cylindrique est donnée par $div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. La condition d'incompressibilité du fluide donne alors

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}(r,z) = 0.$$

On en déduit donc, avec $\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}$, que $\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \left(v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_z\vec{u_z} = 0$. L'équation de Navier Stockes $\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\vec{v}$ donne alors, avec $\Delta v_z\vec{u_z} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\vec{u_z}$,

$$\begin{cases}0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\end{cases}$$

On tire des deux premières relations $P(r,\theta,z) = P(z)$. La dernière relation est donc une égalité de deux fonctions de variable indépendantes. On a donc

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \kappa.$$

On en déduire $P(z) = P_0 + \kappa z$ et comme $\Delta P = P(L) - P(0)$, on a

$$P(z) = P(0) + \frac{\Delta P}{L}z.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) &= \frac{\Delta P}{L} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{\Delta P}{\eta L}r \\ \Leftrightarrow\quad r\frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{2} + A \\ \Leftrightarrow\quad \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r}{2} + \frac{A}{r} \\ \Leftrightarrow\quad v_z(r) &= \frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{4} + A\,ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + B\end{aligned}$$

Or les conditions au limites imposent

$$|v_z(0)| < \infty$$

$$|v_z(R)| = 0 \text{ car le fluide est visqueux et la paroi immobile}$$

On en déduit donc

$$v_z(r) = -\tfrac{R^2 \Delta P}{4\eta L} \left(1 - \tfrac{r^2}{R^2}\right)$$