Mécanique du point : cinématique (PCSI)

---

1. On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est suivi avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante. Déterminez sa vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$.
2. L'étude dynamique montre que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante au cours du mouvement de la Terre, où r est la distance de la Terre au Soleil (loi des aires). En déduire que l'orbite de la Terre est circulaire et déterminez sa vitesse.
3. Exprimez la position, la vitesse et l'accélération de la Terre au cours du temps en coordonnées polaire et cartésienne.

Question de cours

Une particule est repérée par ses coordonnées : $r(\theta) = \frac{p}{1+ecos\theta}$, $\theta = \omega t$ $z = 0$. Déterminez sa vitesse en coordonnées polaires en fonction de sa vitesse angulaire.

Exercice :

Le Large Hadron Collider du CERN est un accélérateur de particule qu'on supposera circulaire et de 27km de circonférence. Il entraine des protons jusqu'à une énergie de 7 TeV pour créer des collisions de très haute énergie.

1. En considérant la norme de la vitesse des protons constante, montrez que leur vitesse angulaire est constante. Déterminez leur vitesse angulaire et leur accélération en coordonnées polaires.
2. En utilisant la formule classique de l'énergie cinétique, déterminez la vitesse des protons dans l'accélérateur. Que remarquez vous ?
3. On donne l'expression relativiste de l'énergie : $E = \gamma mc^2$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, où c est la vitesse de la lumière. Déterminez la vitesse des protons à l'aide de cette formule.

Données : masse du proton $m_pc^2 = 1GeV$.

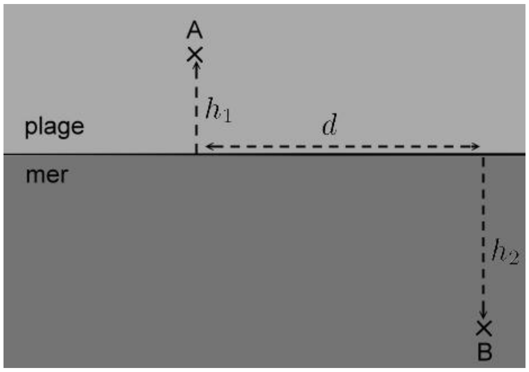
Question de cours

Une particule est repérée par ses coordonnées : $x(t) = Acos\left(\theta(t)\right)$, $y(t) = Asin\left(\theta(t)\right)$, $z = v_zt$. Déterminez la vitesse en coordonées cartésiennes et polaires en fonction de sa vitesse angulaire.

Exercice : L'effet Doppler

On considère un capteur ultrason s'éloignant à la vitesse $v_0 = cste$ d'une source d'ultrasons supposée fixe.

1. A l'instant $t_1 = 0$, la source émet un signal (un “bip”) qui se propage à une vitesse c. A quel instant t'_1 ce signal atteint-t-il le capteur ?
2. A l'instant $t_2 = T$, la source émet un second “bip” qui se propage toujours à la même vitesse. A quel instant t'_2 ce signal atteint-t-il le capteur ?
3. La source émet à présent un signal continu, périodique, de fréquence ν. A quelle fréquence le signal est-il perçu par le capteur ?
4. *Application :* Pourquoi entend-t-on les sirènes des ambulances plus aïgues quand elles s'approchent et plus graves quand elles s'éloignent ?
5. *Application* : A l'aide de cet effet, comment peut on mesurer la vitesse d'éloignement d'une voiture ? D'une étoile ?

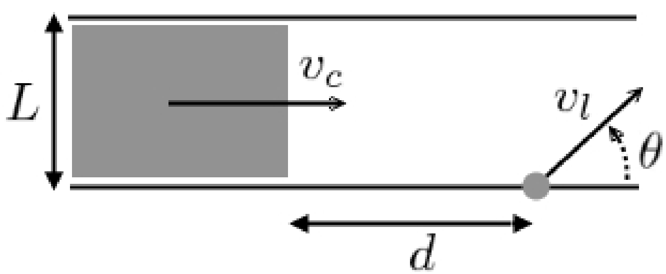


La scène se passe à Malibu. Pamela se trouve sur la plage en A. Elle doit aller secourir le plus vite possible un baigneur en détresse situé en B. Elle peut courir sur la plage à la vitesse v_1 et nager à la vitesse v_2.

1. Quel chemin doit elle suivre pour atteindre le baigneur au plus vite ?
2. Quel résultat physique fondamental retrouve-t-on ainsi ?

Solution

On paramètre par les angles i_1 et i_2, angle d'incidence de la trajectoire par rapport à la normale au niveau du dioptre.
On doit avoir
$d_1 = h_1 tan i_1$ $d_2 = h_2 tan i_2$ *et* $d_1 + d_2 = d$ *donc* $h_1 tan i_1 + h_2 tan i_2 = d$
ie $\frac{h_1}{cos^2 i_1} di_1 + \frac{h_2}{cos^2 i_2} di_2 = 0$
et $T = \frac{1}{c_1}\frac{h_1}{cos i_1} + \frac{1}{c_2}\frac{h_2}{cos i_2}$ *donc L min pour* $dL = \frac{1}{c_1}\frac{h_1}{cos^2 i_1} sin i_1 di_1 + \frac{1}{c_2}\frac{h_2}{cos^2 i_2} sin i_2 di_2 = 0$
et avec la relation entre di_1 et di_2, $\frac{1}{c_1}\frac{h_1}{cos^2 i_1} sin i_1 di_1 - \frac{1}{c_2}\frac{h_1}{cos^2 i_1} sin i_2 di_1 = 0$ *ie* $\left(\frac{1}{c_1} sin i_1 - \frac{1}{c_2} sin i_2\right)\frac{h_1 di_1}{cos^2 i_1} = 0$
et avec $n_i = \frac{c_0}{c_i}$*, on a bien* $n_1 sin i_1 = n_2 sin i_2$



Un lapin essaie de traverser une route, de largeur L, sur laquelle roule un camion. Initialement, le lapin est à une distance d_0 du camion. Il court à la vitesse v_l en formant un angle θ avec l'horizontal, tandis que le camion roule à la vitesse v_c.

1. Déterminez le temps nécessaire au lapin pour traverser la route.
2. Exprimez la distance entre le camion et le lapin au cours du temps. A quelle condition sur cette distance le lapin reste-t-il entier ?
3. Déterminez la valeur minimale de la vitesse v_l pour laquelle le lapin peut traverser la route sain et sauf.

Lors de la collision d'un faisceau de protons sur une cible de carbone de nombreuses particules sont produites. Pour caractériser la direction d'une particule, on définit sa *pseudo rapidité* par la relation $\eta = ln\left[tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$.

Montrez qu'on peut relier la pseudo rapidité aux composantes de l'impulsion de la particule par la relation $\eta = -\frac{1}{2} ln\left(\frac{|\overrightarrow{p}| - p_\parallel}{|\overrightarrow{p}| + p_\parallel}\right)$. On pourra utiliser la relation $tan\theta = \frac{2 tan\frac{\theta}{2}}{1 - tan^2\frac{\theta}{2}}$ et la paramétrisation $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.