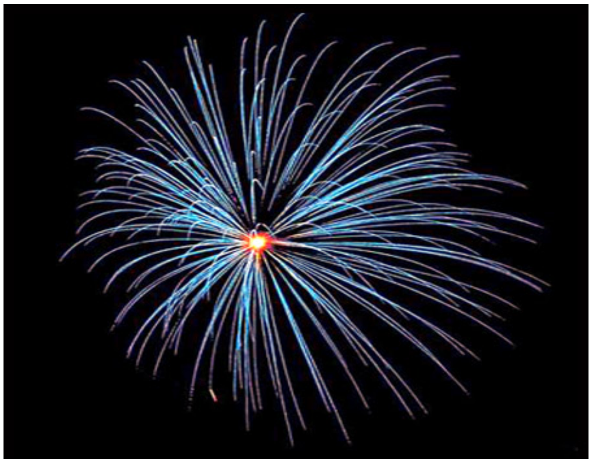
Mécanique du point : dynamique (PCSI)

Question de cours 15 minutes

Chute libre dans un champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ sans vitesse initiale.

Exercice Explosion d'une bombe d'artifice

Une bombe d'artifice explose en libérant des *étoiles*, petites sphères de matière pyrotechnique incandescentes assimilées à des points matériels de masse m. On ne tiendra compte que de la gravité. On se ramène par symétrie à l'étude du mouvement dans un seul plan.



1. On considère que la bombe est au repos quand elle explose et que toutes les étoiles ont la même vitesse initiale v_0. Déterminez la trajectoire de celle dont la vitesse initiale forme un angle α avec la verticale.
2. En déduire que les étoiles forment à tout instant un cercle, dont on déterminera le rayon et le centre.

Question de cours 15 minutes

Chute libre dans un champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ avec vitesse initiale.

Exercice Le petit prince

On se place juste à la surface d'une planète de rayon R et de champ gravitationnel g. On envoie une pomme avec une vitesse v_0 purement horizontale et on négligera les frottements de l'air.

1. En supposant la planète localement plane, déterminez la hauteur dz dont est tombée la pomme après avoir parcouru une longueur dx.

2. Après une distance horizontale dx, de combien le sol de la planète est il descendu ? On pourra utiliser les formules pour les petits angles $tan\theta \simeq \theta$, $cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

3. En déduire qu'il existe une certaine vitesse v_0 pour laquelle la pomme va revenir à son point de départ.

Solution

Pour une chute libre avec vitesse initiale horizontale, $x = v_0 t$ *et* $z = \frac{1}{2}gt^2$*, donc autour de l'instant initial* $0 + dz = \frac{1}{2}g(0+dt)^2 = \frac{1}{2}g\frac{dx^2}{v_0^2}$.

Pour une sphère de rayon R, $dh = (1 - cos d\theta)R = \frac{d\theta^2}{2}R = \frac{dx^2}{2R}$.

On met donc la pomme en orbite si $\frac{dx^2}{2R} = \frac{1}{2}g\frac{dx^2}{v_0^2}$ *ie* $v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

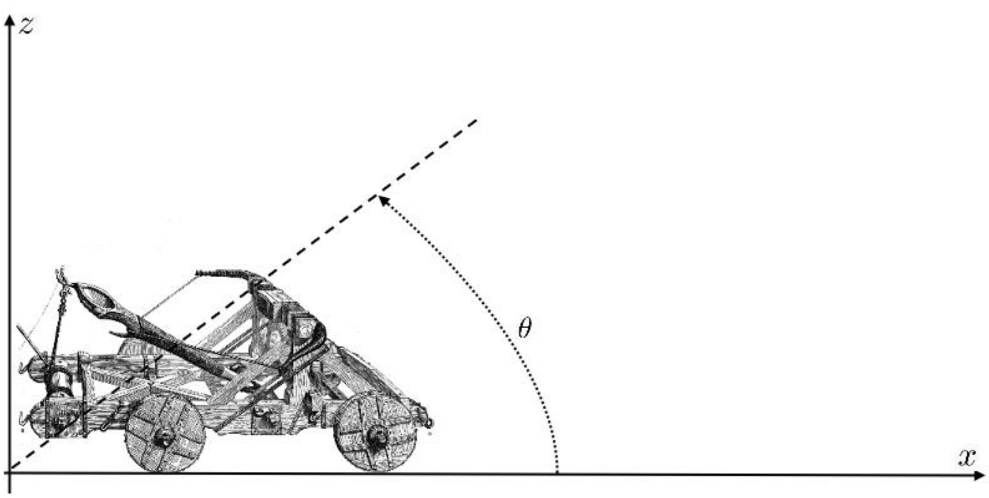
Question de cours 5 minutes

Rappelez les lois du frottement solide de Coulomb.

Exercice Masse sur un tapis roulant

Un objet M de masse m est attaché par un ressort de constante de raideur k et de longeur à vide l_0 et posé sur un tapis roulant qui l'éloigne du mur à la vitesse v_0. On modélisera les frottements solides en utilisant les lois de Coulomb.

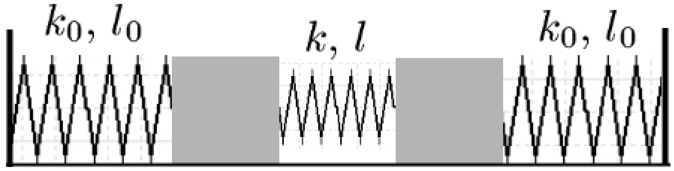
Le solide est initialement placé à une distance $x = l_0$ du mur. Déterminez son mouvement au cours du temps.



Une catapulte envoie un projectile de masse m à la vitesse $\vec{v_0}$ suivant un angle θ_0.

1. En négligeant les frottements de l'air, donnez l'expression de la trajectoire, puis déterminez l'angle $\theta_0$qui permet de tirer le plus loin possible.
2. Le projectile doit retomber derrière le mur d'enceinte de la ville assiègée, de hauteur h, situé à une distance d.

   A quelles conditions sur h et d le projectile peut-il effectivement franchir la muraille ?
3. On envisage à présent les frottements de l'air sous la forme d'une force $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse du projectile.
   (a) Déterminez l'équation horaire du mouvement.
   (b) Montrez que la vitesse du projectile tend vers une vitesse limite.
   (c) Déterminez la distance maximale que le projectile peut couvrir.



Deux masselottes identiques, assmiliées à des points matériels de masse m, sont reliées par des ressorts selon le dispositif ci dessus, de longueur totale L. On repère leurs positions par leurs absisses x_1 et x_2.

1. Trouvez les équations différentielles vérifiées par x_1 et x_2.
2. Déterminez les positions d'équilibre $x_{1,eq}$ et $x_{2,eq}$. Comment vérifier la cohérence du résultat obtenu ?
3. On pose $X_1 = x_1 - x_{1,eq}$ et $X_2 = x_2 - x_{2,eq}$. Trouvez les équations différentielles vérifiées par X_1 et X_2.
4. On pose $Y = X_2 + X_1$ et $Z = X_2 - X_1$. Exprimez $Y(t)$ et $Z(t)$ et en déduire $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

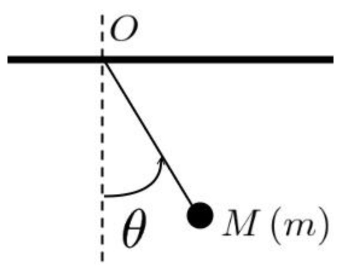
Un commando saute en parachute en territoire ennemi. Son saut se déroule en deux phases. Il commence par sauter de l'avion à l 'altitude de croisière h et tombe en chute libre ; puis il ouvre son parachute.

– Proposez un modèle pour décrire le saut.

On adopte le modèle suivant : tant que son parachute n'est pas ouvert, les frottements peuvent s'exprimer sous la forme $\overrightarrow{f_1} = -\alpha_1 \overrightarrow{v}$. On suppose que le parachute s'ouvre instantanément et transforme l'expression des frottements en $\overrightarrow{f_2} = -\alpha_2 ||\overrightarrow{v}|| \, \overrightarrow{v}$. Le parachutiste et son paquetage sont assimilés à un point M de masse m.

– Exprimez la vitesse du parachutiste au cours du temps lors de la première phase. Au bout de combien de temps a-t-il atteint 95% de sa vitesse limite ? A quelle altitude le parachutiste se trouve-t-il à ce moment ?
– Dès qu'il a atteint la vitesse v_{lim}, le parachutiste ouvre son parachute. Exprimez la vitesse du parachutiste en fonction de la distance parcourue depuis l'ouverture du parachute. Quelle vitesse finale atteint-il ?
  Indication : on pourra poser $u = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ *et étudier* $\frac{du}{dz}$.

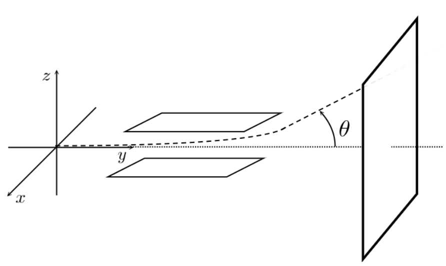
Données numériques : $\alpha_1 = 15 kg.s^{-1}$ $\quad \alpha_2 = 57 kg.m^{-1}$ $\quad m = 100 kg$.



On considère un pendule de masse m, assimilé à un point matériel M, relié à un point O fixe par un fil de longueur l.

1. Citez 3 méthodes permettant de trouver l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ(formé entre la verticale et le pendule).
2. Appliquez l'une de ces méthodes pour déterminer l'équation différentielle en question et la résoudre pour $\theta(0) = \theta_0 \ll 1$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
3. Tracez un portrait de phase du mouvement du pendule.
4. Etudiez l'existence de positions d'équilibre et déterminez leur stabilité.

EXERCICE OSCILLOSCOPE



Un électron, de charge $-e$ et de masse m_e, est envoyé suivant l'axe y à la vitesse $v_0 \overrightarrow{u_y}$. Il passe entre deux plaques, paralèlles au plan xOy, de longueur L, où règne un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u_z}$. Il arrive ensuite sur un écran, situé à une distance D de bout des plaques, où il laisse une trace.

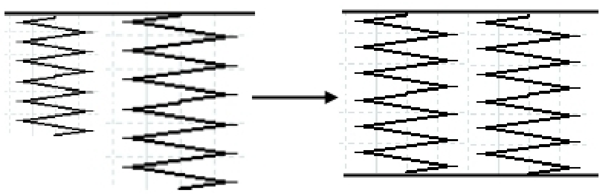
1. Effectuez un bilan des forces s'exerçant sur l'électron dans les différentes zones de l'espace et proposez une première interprétation physique du mouvement.
2. Lorsqu'il ressort des plaques, sa trajectoire forme un angle θavec l'axe $\overrightarrow{u_y}$. Calculez cet angle.
3. Déterminez les coordonnées du point d'impact de l'électron sur l'écran.

On remplace à présent le champ électrique par un champ d'expression $\overrightarrow{E} = E_0 sin(\omega t) \, \overrightarrow{u_z}$.

1. L'électron arrive entre les plaques à $t = 0$. Déterminez son point d'impact sur l'écran.
2. On envoie à présent un faisceau d'électrons : un électron est envoyé toutes les T secondes. Quelle figure se forme sur l'écran pour $T = \frac{\pi}{\omega}$? Pour $T = \frac{2\pi}{\omega}$? Pour $T \ll \frac{1}{\omega}$?

On se propose d'étudier le comportement de ressorts attachés les uns aux autres.

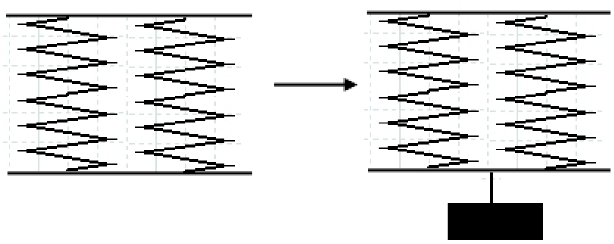
1. Ressorts en parallèle.



Deux ressorts, de longueur à vide l_{01} et l_{02} et de constantes de raideurs k_1 et k_2 sont attachés l'un à côté de l'autre. On les contraint à mesurer la même longueur l_0. On note Δl_1 et Δl_2 l'allongement de chaque ressort.

   (a) Exprimez deux équations vérifiées par Δl_1 et Δl_2, l'une décrivant la géométrie du problème et l'autre sa dynamique.

   (b) Résoudre ce systeme pour obtenir Δl_1, Δl_2 et l_0



On attache au dispositif précédent un corps M de masse m.

   (a) Exprimez la force subie par le corps M.

   (b) Montrez que les deux ressorts ainsi associés sont équivalents à un ressort unique de longueur à vide l_0 et de constante de raideur $k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$.

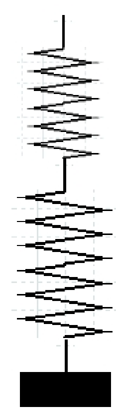
2. Ressorts en série.

   On relie à présent bout à bout deux ressorts de longueur à vide l_{01} et l_{02} et de constantes de raideurs k_1 et k_2. On attache un corps M de masse m au bout du ressort 2.

   (a) Exprimez la somme des forces exercées sur le corps M.

   (b) Exprimez la somme des forces exercées sur le point fictif A de masse nulle situé entre les deux ressorts.

   (c) Montrez que les deux ressorts ainsi associés sont équivalents à un ressort unique de longueur à vide $l_{01} + l_{02}$ et de constante de raideur $k_{eq} = k_1 + k_2$.



Question de cours

On considère un point M de masse m suspendu à un ressort de longueur de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k.

1. Déterminez la position d'équilibre du point M.
2. On tire la masse à une distance δ de sa position d'équilibre dans l'axe du ressort avant de la lacher sans vitesse initiale. Déterminez l'équation du mouvement.

Exercice

On relie à présent bout à bout deux ressorts de longueur à vide l_{01} et l_{02} et de constantes de raideurs k_1 et k_2. On attache un corps M de masse m au bout du ressort 2. On note x_M sa position et x_R celle du point de liaison entre les ressorts.

1. Exprimez la somme des forces exercées sur le corps M en fonction de m, g, k_2, l_{02} et x_R.
2. Exprimez la somme des forces exercées sur le point de laisison entre les deux ressorts, supposé de masse nulle, en fonction de k_1, l_{01}, k_2, l_{02} et x_M.
3. Montrez que les deux ressorts ainsi associés sont équivalents à un ressort unique de longueur à vide $l_{01} + l_{02}$ et de constante de raideur $k_{eq} = k_1 + k_2$.