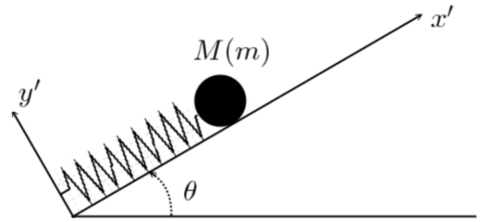
Mécanique du point : approche énergétique (PCSI)

Exercice Bille de Flipper

On se propose d'étudier le lancement d'une bille de flipper.



Un ressort, de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k est placé au bas d'un plan incliné formant un angle α avec l'horizontale. Une bille M de masse m est posée au bout.

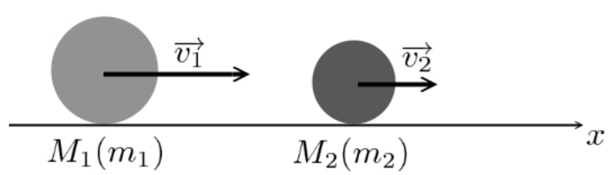
1. Déterminez la position d'équilibre du ressort.
2. Le ressort est comprimé d'une longueur d par rapport à sa position d'équilibre. A $t = 0$, on lache le ressort.
   (a) Expliquez qualitativement le mouvement de la bille.
   (b) En appliquant le PFD, déterminez l'équation de la position de la bille tant qu'elle est en contact avec le ressort, puis l'expression de sa vitesse au moment où elle quitte le ressort, puis h, distance maximale atteinte sur x'.
   (c) Retrouvez l'expression de la vitesse d'éjection et de h à l'aide des théorèmes sur l'énergie.

Question de cours

Démontrez la conservation de l'énergie mécanique en l'absence de forces non conservatives.

Exercice Chocs

On étudie un choc entre deux particules, M_1 et M_2, de masse m_1 et m_2 et de vitesses $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ suivant l'axe x.



On suppose le choc élastique : les particules ne peuvent pas se déformer. Après le choc, elles conservent leur masse, leur forme et leur vitesse devient $\overrightarrow{v_1'}$ et $\overrightarrow{v_2'}$

1. Faites une analyse qualitative du problème (symétries, cas limite ($m_1 \gg m_2$)).
2. Ecrire les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion au cours du processus.
3. Exprimez $\overrightarrow{v_1'}$ et $\overrightarrow{v_2'}$ en fonction de m_1, m_2, $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Retrouve-t-on l'analyse de 1) ?
4. Application : une balle de ping pong est posée sur une balle de tennis, à une hauteur h. On lache les deux balles. A quelle altitude remonte la balle de ping pong ?

QUESTION DE COURS

Montrez qu'une force de la forme $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{U_r}$ dérive d'un potentiel dont on donnera l'expression.

EXERCICE RAYON DE SCHWARZSCHILD

1. Rappelez l'expression de la force d'attraction gravitationelle et déduisez en l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
2. Une fusée de masse m est posée à la surface d'une planète de masse M et de rayon R. Elle décole avec une vitesse v_0.

   Quelle est la valeur minimale de v_0 qui permet à la fusée d'échapper à l'attraction gravitationelle de la planète ?
3. On imagine à présent que la fusée peut décoller à la vitesse de la lumière c.

   Exprimez, en fonction de la masse M de la planète, le rayon minimal au-deça duquel la fusée ne peut plus échapper à l'attraction gravitationelle.

Données : $G = 6.67\,10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ $\qquad$ $M_{Terre} = 6\,10^{24} kg$

QUESTION DE COURS

On rappelle la forme de la force de Coulomb exercée par une particule M_1 de charge q_1 sur une particule M_2 de charge q_2 : $\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(M_1M_2)^2}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$. Montrez que cette force est conservative et déterminez l'énergie potentielle dont elle dérive.

EXERCICE FORMULE DE BETHE BLOCH

On considère une particule de masse m et de charge Ze qui se déplace avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{cste}$. Elle vient de $x = -\infty$ et va jusqu'en $x = +\infty$. On fixe à $t = 0$ le moment où elle passe en $x = 0$. En $x = 0$, $y = \rho$ se trouve une particule cible de masse M et de charge $Z'e$. *On suppose que cette particule est fixée à sa position initiale.* On cherche à calculer l'énergie donnée par la particule à la cible.

1. Exprimez dans la base $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}$ la force exercée par la particule sur la cible lorsqu'elle se trouve à l'abscisse x en fonction de l'angle θ entre les deux particules et l'axe $\overrightarrow{u_x}$.
2. En déduire la quantité de mouvement $\overrightarrow{dp}$ apportée par la particule à la cible entre l'instant t et l'instant $t + dt$, où dt est infiniment petit.
3. Justifier pourquoi la quantité de mouvement totale apportée par la particule à la cible peut s'écrire sous la forme $\overrightarrow{\Delta p} = \Delta p_y \overrightarrow{u_y}$.
4. Calculez la valeur de Δp_y en fonction de Z, Z', e, M, v_0 et ρ.
5. En déduire la variation d'énergie de la cible, donc la perte d'énergie par l'électron. Commentez.

Exo *ionisation*

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z'Ze^2}{r^2}\overrightarrow{u_r} = \frac{Z'Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{sin^2\theta}{\rho^2}cos\theta\overrightarrow{u_x} + \frac{sin^2\theta}{\rho^2}sin\theta\overrightarrow{u_y}\right)$$

$$\overrightarrow{dp} = \overrightarrow{F}dt$$

$F_x(x) = -F_x(x)$; comme on intègre de $t = -\infty$ à $t = +\infty$ ou de manière équivalente de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, la composante suivant x est nulle.

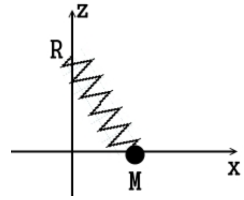
$$\Delta p_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Z'Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{sin^3\theta}{\rho^2}dt = \frac{Z'Ze^2}{4\pi\epsilon_0\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty}sin^3\theta\frac{dx}{v_0} = \frac{Z'Ze^2}{4\pi\epsilon_0\rho^2 v_0}\int_{-\infty}^{+\infty}sin^3\theta d\left(\frac{\rho}{tan\theta}\right) = \frac{Z'Ze^2}{4\pi\epsilon_0\rho^2 v_0}\int_0^{\pi}sin^3\theta\frac{\rho}{sin^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{Z'Ze^2}{4\pi\epsilon_0\rho v_0}\int_0^{\pi}sin\theta d\theta = \frac{Z'Ze^2}{2\pi\epsilon_0\rho v_0}$$

$$\textit{On en déduit } \Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2M} = \frac{Z'^2Z^2e^4}{8\pi^2\epsilon_0^2\rho^2v_0^2M}$$

Exercice Système à Fourche ; Brisure spontanée de symétrie

Une masse $M(m)$ est attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. La masse glisse sans frottement le long de l'axe horizontal et le ressort est attaché à une distance R de cet axe.



1. En prenant comme référence $E_p(x=0)=0$, montrez que l'énergie potentielle a pour expression $E_p = \frac{1}{2}k\left(\left(\sqrt{R^2+x^2}-l_0\right)^2-(R-l_0)^2\right)$.
2. Comment déterminer l'existence de positions d'équilibre dans le cas d'un système à un degré de liberté ? En séparant les cas $R>l_0$ et $R<l_0$, étudiez l'existence de positions d'équilibre x_{eq}.
3. Comment déterminer la stabilité des positions d'équilibre dans le cas d'un système à un degré de liberté ? Caractérisez chacune des positions trouvées précédemments.
4. Tracez une courbe $x_{eq}=f(R)$. Pourquoi dit-on d'un tel système qu'il présente une bifurcation ?

Question de cours

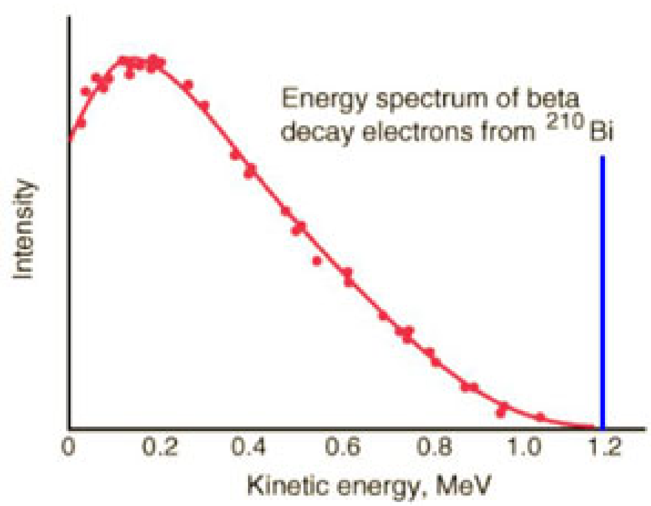
Démontrez la conservation de l'énergie mécanique en l'absence de forces non conservatives.

Exercice Désintégration à Deux corps ; existence du Neutrino

Dans cet exercice, on se placera dans le cadre relativiste et on utilisera la formule de l'énergie $E=\sqrt{mc^2+p^2c^2}$.

Une particule de masse m_0 initialement au repos dans le référentiel du laboratoire se désintègre en donnant naissance à deux particules de masse m_1 et m_2 d'impulsion $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$

1. Ecrire les équations traduisant la conservation de l'impulsion et de l'énergie au cours du processus.
2. En déduire une équation vérifiée par la norme de l'impulsion p_1.
3. En déduire que si $m_0>m_1+m_2$, la valeur de p_1 et p_2 sont fixées de manière unique.
4. En déduire que l'énergie des particules issues de la désintégration est fixée de manière unique.
5. Commentez le spectre d'énergie ci dessous, obtenu pour la désintégration d'un sodium $^{22}Na \rightarrow ^{22}He+e^+$



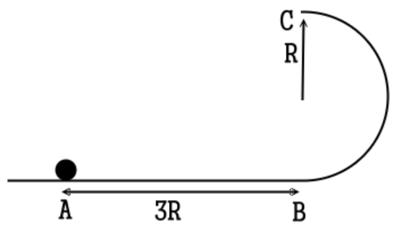
Solution

$$\begin{cases} E_0 = m_0c^2 = E_1+E_2 \\ 0 = \overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2} \end{cases}$$

$$m_0c^2 = \sqrt{m_1^2c^4 + p_1^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + p_1^2c^2} \ car\ p_1 = p_2.$$

La fonction $f(p_1) = \sqrt{m_1^2c^4 + p_1^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + p_1^2c^2} - m_0c^2$ est une fonction de p_1 continue et strictement croissante. De plus, $f(0) < 0$ si $m_1 + m_2 < m_0$ et $\lim_{p_1 \to \infty} f(p_1) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur de p_1 telle que $f(p_1) = 0$

On s'intéresse à un jeu de fête foraine :



On lance une balle M de masse m avec une vitesse $\vec{v_0}$ à une distance $3R$ d'un pipe. La balle doit arriver en haut du pipe en C et retomber à son point de départ en A. La balle se déplace sans frottements.

1. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, calculez la vitesse de la balle lorsqu'elle atteint le point B.
2. Calculez la vitesse v_0 nécessaire à la balle pour atteindre le point C. Quelle est alors sa vitesse ?
3. En supposant que la balle atteint le point C, à quelle distance retombe-t-elle au sol ?

   (a) Montrez que si la distance AB est trop petite, le jeu ne peut être gagné.
