Mécanique du point : forces Newtoniennes (PCSI)

Question de cours

On admet que, lorsqu'il est soumis à une force Newtonienne $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}$, la trajectoire d'un corps est plane et décrite par $r = \frac{mC^2}{K}\frac{1}{1+e\,cos\theta}$ où $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Etablir l'expression de l'énergie mécanique en fonction de e, K, m et C^2.

Solution

- *Energie potentielle :* $E_p = -\frac{K}{r} = -\frac{K^2}{mC^2}\left(1 + e\,cos\theta\right)$
- *Energie cinétique :*

$$
\begin{aligned}
v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\
&= \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\frac{C^2}{r^4} \\
&= \left(\left(\frac{mC^2}{K}\frac{-e\,sin\theta}{\left(1+e\,cos\theta\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{mC^2}{K}\frac{1}{1+e\,cos\theta}\right)^2\right)\frac{C^2}{r^4} \\
&= \left(\frac{m^2C^4}{K^2}\frac{e^2\,sin^2\theta}{\left(1+e\,cos\theta\right)^4} + \frac{m^2C^4}{K^2}\frac{1}{\left(1+e\,cos\theta\right)^2}\right)\frac{C^2K^4}{m^4C^8}\left(1+e\,cos\theta\right)^4 \\
&= \left(\frac{K^2}{m^2C^2}e^2\,sin^2\theta + \frac{K^2}{m^2C^2}\left(1+e\,cos\theta\right)^2\right) \\
&= \frac{K^2}{m^2C^2}\left(e^2sin^2\theta + e^2cos^2\theta + 1 + 2\,ecos\theta\right) \\
&= \frac{K^2}{m^2C^2}\left(e^2 + 1 + 2e\,cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

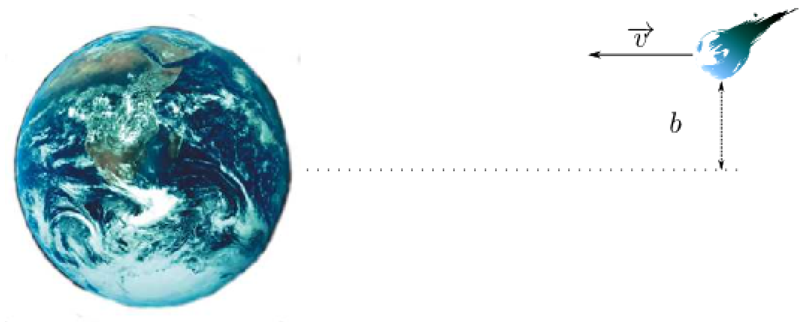
  et $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{K^2}{2mC^2}\left(e^2 + 1 + 2e\,cos\theta\right)$
- *Energie mécanique :* $E_c + E_p = \frac{K^2}{2mC^2}\left(e^2 - 1\right)$

Question de cours

On considère un objet soumise à une force Newtonienne $\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}$. Montrez que sa trajectoire est régie par une équation de la forme $r = \frac{p}{1+e\,cos\theta}$.

Exercice Paramètre d'impact

Une météorite arrive depuis l'infini vers la Terre avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. On note b le paramètre d'impact comme indiqué sur la figure ci dessous. L'objectif de ce problème est de déterminer la valeur minimale de b pour laquelle la météorite évite la collision avec la Terre.



1. La météorite n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre. Déterminez la nature de sa trajectoire. Montrez que le mouvement est plan et déterminez une relation entre r et $\dot{\theta}$.
2. On note N le point de la trajectoire auquel la distance qui sépare la météorite de la Terre est la plus petite. Montrez qu'en N, la vitesse est uniquement suivant $\overrightarrow{u_\theta}$. En déduire une relation entre la vitesse v_N au point N, la distance ON, b et v_0.
3. En utilisant la conservation de l'énergie, montrez la relation
$$0 = r_{min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{min} - v_0^2 b^2$$
4. En déduire l'expression minimale b_c du paramètre d'impact telle que pour $b < b_c$, la météorite frappe la Terre et pour $b > b_c$, la météorite évite la Terre. Interprêtez.

Solution

1. *Seule force considérée :* $\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ *dont le moment par rapport à* T *vaut* $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = 0$ *donc le TMC donne* $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$. *Le fait que la direction de* $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$ *soit constante implique que ces deux vecteurs sont toujours contenus dans le même plan (car* $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$ *est othogonal au plan qui les contient tous les deux) donc le mouvement est plan. D'autre part, en coordonnées polaires,* $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = (r\overrightarrow{u_r}) \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ *donc* $r^2\dot{\theta} = cste$.
on peut calculer $m\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = mr^2\dot{\theta} = m\overrightarrow{r_0} \wedge \overrightarrow{v_0} = m\left(-x_0\overrightarrow{u_x} - b\overrightarrow{u_y}\right) \wedge (v_0\overrightarrow{u_x}) = mbv_0\overrightarrow{u_z}$ *donc* $r^2\dot{\theta} = v_0 b$
2. $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ *et au point le plus proche,* $\dot{r} = 0$ *car* r *est minimal donc* $\overrightarrow{v_N} = r_{min}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \frac{v_0 b}{r_{min}}\overrightarrow{u_\theta}$.
3. $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_N^2 - \frac{GM_T m}{r_{min}} = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{GM_T m}{r_{min}}$ *donc* $0 = r_{min}^2 v_0^2 + 2GM_T r_{min} - v_0^2 b^2$
4. *La valeur critique correspond à* $r_{min} = R_T$ *donc* $v_0 b_c = \sqrt{R_T^2 v_0^2 + 2GM_T R_T}$ *ie* $b_c = R_T\sqrt{1 + \frac{2GM_T}{R_T v_0^2}} = R_T\sqrt{1 + \frac{v_{lib}^2}{v_0^2}}$

Exercice Extinction des Dinausores

Il y a de cela environ 65 millions d'années, les dinosaures et de nombreuses autres espèces vivantes ont été victimes d'une extinction massive et brutale . Parmi les diverses hypothèses proposées, la plus communément admise est celle de l'impact d'une comète à la surface de la Terre. Cet exercice propose d'étudier la vitesse que peut avoir une telle comète lors de son impact avec la Terre.

Un ensemble d'astéroïdes de faible dimension se trouve vraisemblablement réparti dans le système solaire au dela de l'orbite de pluton. La masse de ces astéroïdes (nuage de Oort) représente environ le tiers de la masse totale des 9 planètes du système solaire. Lorsqu'un de ces astéroïdes est suffisamment dévié de sa trajectoire quasi-circulaire (par l'effet gravitationnel d'autres planètes ou astéroïdes), il peut s'approcher à très courte distance du soleil et prend le nom de comète.

Nous étudions ici une comète C de masse $m = 2,5\,10^{15} kg$ ayant pour trajectoire autour du soleil une ellipse très allongée. Elle est aussi caractérisée par une distance maximale au soleil $d_{max} = 5.104\,a$ où a est le rayon de la trajectoire supposée circulaire de la Terre autour du soleil. On note T_0 la période du mouvement de la Terre autour du soleil .

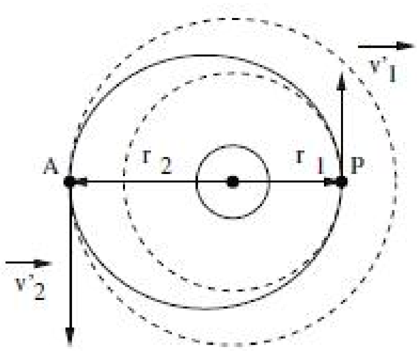
1. Comment appelle t-on a ? Que valent a et T_0 ?
2. Déterminer numériquement la vitesse v_0 de la Terre sur son orbite circulaire autour du Soleil.
3. On note G la constante de gravitation universelle et M_S la masse du Soleil. Exprimer le produit $G\,M_s$ en fonction de v_0 et a.
4. Les distances minimales et maximales de C au soleil sont notées d_m et d_M. Exprimer, en fonction ded_m, a, v_0 et d_M, les vitesses maximale v_M et minimale v_m de C sur son orbite. On utilisera les relations de conservation.
5. Quelle relation doivent vérifier d_m et a pour qu'un impact de C sur la surface de la Terre puisse être envisagé ? En déduire une évaluation numérique de la plus petite valeur possible de v_M.
6. On considère $d_m \simeq a$. Quelles sont les valeurs extrêmes possibles de la vitesse relative de la Terre et de C (vitesse d'impact) au moment du choc de C sur la Terre ?

Exercice Mise en orbite d'un satellite

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r = R + h$ autour du centre de la terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre).

1. Montrer que la vitesse v est constante et donner sa valeur.
2. En déduire la période T du mouvement et relier la période T à l'altitude r. Comment s'appelle cette loi ?
3. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite ; quelle est la relation simple entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.
4. Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Quelle est alors sa période ? En déduire son altitude h.
5. Un satellite est initialement immobile par rapport à la terre, sur une base de lancement située à une latitude λ. Une fusée lui fournit un travail W pour l'amener sur son orbite avec la vitesse initiale calculée précédemment.
   (a) Quelle est l'énergie mécanique du satellite avant son lancement (on n'oubliera pas de tenir compte de la rotation de la terre) ?
   (b) Calculer le travail W que la fusée doit fournir au satellite. Où doit-on placer de préférence la base de lancement ?

Exercice Orbite de transfert de Hoffman



Un satellite M de masse m est en orbite circulaire autour de la Terre à un altitude r_1. On cherche à le faire passer à une orbite circulaire d'altitude r_2. Pour cela, on passe par une orbite de transfert : lorsque le satellite atteint le point P, on active pendant un cours instant des fusées que font varier sa vitesse de Δv_P et le font passer sur une orbite elliptique, dite orbite de Hohmann. Lorsque le satellite arrive au point A, on réactive les fusées pour faire varier la vitesse de Δv_A et faire passer le satellite sur son orbite finale.

1. Etude d'un mouvement circulaire.
   (a) Montrez qu'un mouvement est circulaire si et seulement si il est décrit à vitesse angulaire constante.
   (b) Déterminez la norme et la direction de la vitesse du satellite sur chacune de ses orbites circulaires.
   (c) Déterminez l'expression de l'énergie mécanique sur chacune des orbites circulaires.
2. Etude de la trajectoire elliptique.
   (a) Rappelez la forme générale de $r(\theta)$.
   (b) Déterminez dans le cas de l'orbite de Hohmann la valeur de l'excentricité e.
   (c) Déterminez l'expression de l'énergie mécanique sur l'orbite de Hohmann.
3. Etude du transfert d'orbite.
   (a) Déterminez les valeurs de Δv_P et de Δv_A.
   (b) Déterminez le temps nécessaire pour que le satellite passe de l'orbite r_1 à l'orbite r_2.

Solution

Pour $r = \frac{p}{1+e\,cos\theta}$, $E_m = \frac{K^2}{2mC^2}(e^2-1) = \frac{K}{2p}(e^2-1)$. *Pour une ellipse,* $a = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-e}+\frac{p}{1+e}\right) = \frac{p}{1-e^2}$ *donc* $E_m = -\frac{K}{2a}$.

1. *Partie*
   (a) *Constante des aires :* $r^2\dot{\theta} = cste$ *donc si* $r = cste$ *(trajectoire circulaire),* $\dot{\theta} = cste$. *donc* $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{u_r}$
   (b) *Pour une trajectoire circulaire,* $-m\frac{v^2}{r}\vec{u_r} = -\frac{mM_TG}{r^2}\vec{u_r}$ *donc* $v^2 = \frac{M_TG}{r}$
   (c) $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\frac{M_TG}{r} - \frac{M_TGm}{r} = -\frac{mM_TG}{2r}$
2. *Partie 2*
   (a) $r = \frac{p}{1+e\,cos\theta}$
   (b) *On veut que* $r_{min} = \frac{p}{1+e} = r_1$ *et* $r_{max} = \frac{p}{1-e} = r_2$ *donc* $\frac{1+e}{1-e} = \frac{r_2}{r_1}$ *donc* $e = \frac{r_2-r_A}{r_2+r_1}$
   (c) *Sur une ellipse,* $E_m = -\frac{GM_Tm}{2a}$ *et* $2a = r_1+r_2$ *donc* $E_m = -\frac{GM_Tm}{r_1+r_2}$
3. *Transfert*
   (a) *En A: on veut passer de l'énergie de l'orbite circulaire :* $-\frac{mM_TG}{2r_1}$ *à l'énergie de l'orbite de Hoffman* $-\frac{GM_Tm}{r_1+r_2}$. *On doit donc fournir l'énergie* $-\frac{GM_Tm}{r_1+r_2} - \left(-\frac{mM_TG}{2r_1}\right) = GM_Tm\left(\frac{1}{2r_1}-\frac{1}{r_1+r_2}\right) = \frac{GM_Tm}{2r_1}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\right)$, *ce qui correspond à un changement de vitesse* Δv_1 *tel que* $\Delta E_c = \frac{1}{2}m\left((v_1+\Delta v_1)^2 - v_1^2\right) = \frac{GM_Tm}{2r_1}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\right)$ *ie* $\Delta v_1^2 + 2v_1\Delta v_1 - \frac{GM_T}{r_1}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\right) = 0$ *avec* $v_1 = \sqrt{\frac{M_TG}{r_1}}$, *on trouve* $\Delta v_1 = -\sqrt{\frac{M_TG}{r_1}} \pm \sqrt{\frac{M_TG}{r_1} + \frac{GM_T}{r_1}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\right)} = \sqrt{\frac{M_TG}{r_1}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\right)}-1\right) = \sqrt{\frac{M_TG}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_2+r_1}}-1\right)$

(b) *En B : En A: on veut passer de l'énergie de l'orbite de Hoffman* $-\frac{GM_Tm}{r_1+r_2}$ *à l'énergie de l'orbite circulaire :* $-\frac{mM_TG}{2r_2}$ *à . On doit donc fournir l'énergie* $-\frac{mM_TG}{2r_1} - \left(-\frac{GM_Tm}{r_1+r_2}\right) = GM_Tm\left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{2r_2}\right) = \frac{GM_Tm}{2r_2}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\right)$, *ce qui correspond à un changement de vitesse* Δv_2 *tel que* $\Delta E_c = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - (v_2-\Delta v_2)^2\right) = \frac{GM_Tm}{2r_1}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}\right)$ *etc*
