Optique géométrique : lentilles (PCSI)

Question de cours

Démontrez la relation de conjugaison de Newton pour une lentille convergente.

Exercice

On considère un dispositif optique constitué de deux lentilles L_1 et L_2 de distances focales f'_1 et $f'_2 = 2f'_1$, alignées sur un banc optique de telle sorte que $L_1L_2 = f'_2$. On observe au travers de la lentille L_2 un objet AB situé devant la lentille L_1 à une distance $4f'_1$.

Déterminez la position de l'image finale.

Solution *Dispositif* $O_1A = -4f'_1$ $AB \stackrel{L_1}{\rightarrow} A_1B_1 \stackrel{L_2}{\rightarrow} A'B'$

$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f'_2}$ *et* $\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow O_1A_1 = \frac{f'_1(-4f'_1)}{f'_1-4f'_1} = \frac{4}{3}f'_1$ *et* $O_2A_1 = O_2O_1 + O_1A_1 = \frac{4}{3}f'_1 - 2f'_1 = -\frac{2}{3}f'_1 = -\frac{1}{3}f'_2$ *et* $O_2A' = -\frac{f'_2}{2}$

Question de cours

Démontrez les relations de conjugaison de Descartes pour une lentille convergente.

Exercice Microscope

On considère un dispositif optique constitué de deux lentilles L_1 et L_2 de distances focales $f'_1 = 5\,cm$ et $f'_2 = 20\,cm$, alignées sur un banc optique de telle sorte que $\Delta = F'_1F_2 = 17\,cm$. On observe au travers de la lentille L_2 un objet AB situé devant la lentille L_1.

1. Où doit on placer l'objet AB pour que son image $A'B'$ soit à l'infini ? On supposera cette condition vérifiée par la suite.
2. Déterminez le grandissement de la lentille L_1.
3. Déterminez l'angle α' sous lequel l'image est vue en fonction de la taille AB de l'objet et en déduire le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$, où α est l'angle sous lequel l'objet peut être vu à l'oeil nu.

Solution

dipositif $AB \stackrel{L_1}{\rightarrow} A_1B_1 \stackrel{L_2}{\rightarrow} A'B'$

image à l'infini $=> A_1 = F_2 => O_1A_1 = f'_1 + \Delta$ *et* $\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow O_1A = -\frac{f'_1(\Delta+f'_1)}{\Delta}$.

Grandissement de $L_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1A_1}{O_1A} = -\frac{\Delta}{f'_1}$

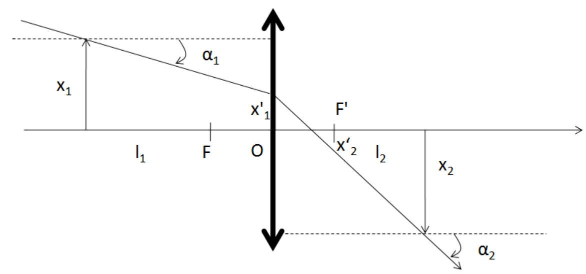
Angle d'observation : $tan\alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{A_1B_1}{AB}\frac{AB}{O_2A_1} = -\frac{\Delta}{f'_1}\frac{AB}{-f'_2}$

A l'oeil, au mieux, A est à une distance ponctum proximum $pp \simeq 25cm$ *de l'oeil.* $tan\alpha = \frac{AB}{pp}$.

EXERCICE TRAITEMENT MATRICIEL

On considère un rayon lumineux arrivant sur une lentille convergente de distance focale f'. A une distance l_1 du foyer objet, le rayon est à une distance x_1 de l'axe optique et forme un angle α_1 avec ce dernier. A une distance l_2 du foyer image, le rayon est à une distance x_2 de l'axe optique et forme un angle α_2 avec ce dernier.

Question préliminaire : indiquez le signe des angles et des distances x_1, x_2, x'_1 et x'_2.



1. Exprimez en fonction de x_1 et de α_1 la distance x'_1 entre le centre optique et le rayon lumineux.
2. Exprimez en fonction de α_1 la distance x'_2 entre le foyer image F et le rayon lumineux.
3. Exprimez x'_2 en fonction de α_2 et de x'_1. En déduire l'expression de α_2 en fonction de α_1 et x_1.
4. Exprimez x_2 en fonction de α_2 et x'_1. En déduire l'expression de x_2 en fonction de α_1 et x_1.

En déduire l'expression de la matrice M telle que $\begin{pmatrix} x_2 \\ f'\alpha_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ f'\alpha_1 \end{pmatrix}$.

Solution

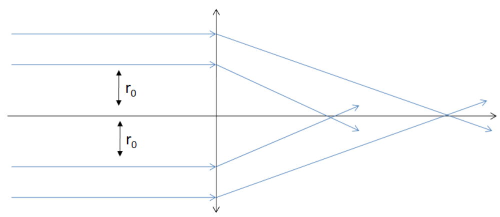
α_1, α_2, x_2 et x'_2<0, x_1 et x'_1<0

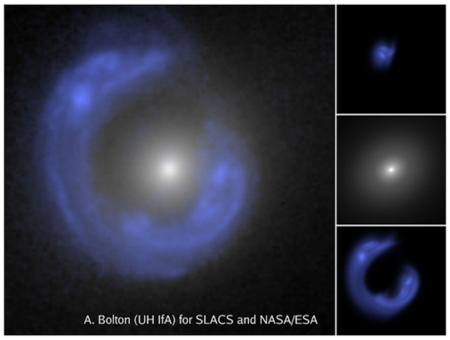
En traçant le rayon parallèle passant par le centre optique, $\frac{x_1 - x'_1}{l_1 + f'} = -\alpha_1$ donc $x'_1 = x_1 + \alpha_1 (l_1 + f')$.

Avec le même rayon, $\frac{x'_2}{f'} = \alpha_1$ donc $x'_2 = \alpha_1 f'$. Avec le rayon réel, $\frac{x'_1 - x'_2}{f'} = -\alpha_2$ donc $\alpha_2 = -\frac{x_1}{f'} - \alpha_1 \frac{l_1}{f'}$. Toujours avec le même, $\frac{x'_1 - x_2}{l_2 + f'} = -\alpha_2$ et on en déduit $x_2 = -x_1 \frac{l_2}{f'} + \alpha_1 \left(f' - \frac{l_1 l_2}{f'} \right)$ donc $M = \begin{pmatrix} -\frac{l_2}{f'} & \left(1 - \frac{l_1 l_2}{f'^2}\right) \\ -1 & -\frac{l_1}{f'} \end{pmatrix}$.

Exercice Lentille gravitationnelle

1. On considère un rayon lumineux arrivant depuis l'infini sur une lentille de distance focale f'. Ce rayon frappe la lentille à une distance r_0 du centre optique. Déterminez la déviation angulaire $\delta\varphi$ du rayon, en considérant $r_0 \ll f'$.
2. On observe depuis la Terre une galaxie supposée à l'infinie. Sur la ligne de visée se trouve un amas galactique de masse M. La relativité générale prédit la déviation des rayons lumineux à proximité de ce corps massif : c'est le phénomène de lentille gravitationnelle. On peut modéliser cet effet par une lentille convergente dont la distance focale dépend de la position du rayon lumineux suivant la relation $\delta\phi = \frac{4GM}{c^2 r_0}$, où r_0 est la distance du rayon lumineux au centre de la lentille et G la constante de gravitation.





   (a) Déterminez la distance focale associée au rayon qui frappe la lentille à une distance r_0 du centre optique.
   (b) On suppose la lentille à une distance D de la Terre. Déterminez le paramètre r_0 des rayons qui sont effectivement observés depuis la planète.
   (c) En déduire l'ouverture angulaire sous lequel l'objet est vu. Pour une source ponctuelle située à l'infini, expliquez pourquoi on observe un anneau (dit anneau d'Einstein)
   (d) On mesure un anneau d'ouverture angulaire $\alpha = 2\,10^{-6}$ amplifié par une lentille distante de $D = 10^9 al$. Déterminez la masse de la lentille. On prendra $1al \simeq 9.10^{15}m$

Solution

$\delta\varphi = tan\delta\varphi = \frac{r_0}{f'} \Rightarrow f' = \frac{c^2 r_0^2}{4GM}$

Les rayons viennent de l'infini donc coupent l'axe optique à une distance f' de la lentille. Pour les observer en D, on a donc $D = \frac{c^2 r_0^2}{4GM} \Leftrightarrow r_0 = \pm 2\frac{\sqrt{GMD}}{c}$. On voit donc un anneau car seul ces deux r_0 sont visibles + symétrie par rotation autour de l'axe optique. Ouverture angulaire $= \frac{r_0}{D} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{GM}{D}}$.

AN : $M = \frac{D}{G}\left(\frac{\alpha c}{2}\right)^2 \simeq 10^{39} kg$

Exercice Focométrie

On étudie 3 méthodes classiques pour déterminer la distance focale f' d'une lentille convergente L. L'utilisation de dessins est vivement recommandée !

1. Comment déterminer rapidement la nature convergente ou divergente d'une lentille ?
2. Méthode de Silbermann.

   La lentille est fixe, on déplace l'écran et l'objet. On s'arrête lorsque l'image formée sur l'écran est inversée et de même taille que l'objet. On mesure la distance d_1 entre l'objet et la lentille. Que vaut la distance focale f' ? Que pensez vous de cette méthode ?
3. Méthode de Bessel.

   L'écran et l'objet sont fixes, séparés par une distance D. On déplace la lentille, dont on repère la position par la distance $\bar{OA} = x$

   - Montrez que si D est suffisamment grand, il existe deux positions x_1 et x_2 tels que l'image de l'objet formée par la lentille soit nette sur l'écran.
     Indication : on pourra exprimer $\bar{OA'}$ en fonction de $\bar{OA}$ et D pour trouver une équation vérifiée par x.
   - On suppose que D est suffisamment grand. On mesure les positions x_1 et x_2. Que vaut la distance focale f' ? Que pensez vous de cette méthode ?
4. Méthode d'autocollimation.

   On ajoute un miroir plan derrière la lentille, qu'on laisse fixe. On déplace l'objet jusqu'à ce que l'image renvoyée par le système $\{lentille + miroir\}$ soit dans le plan de l'objet. On note $AB \to A_1B_1 \to A_2B_2 \to A'B'$ les images successives formées par le système.

   - Exprimez les relations entre $\bar{OA}$ et $\bar{OA'}$, puis entre $\bar{OA}_1$et $\bar{OA}_2$.
   - On mesure la distance d_2 entre l'objet et le système $\{lentille + miroir\}$. A l'aide des relations de conjugaison, déterminez la distance focale f' ? Que pensez vous de cette méthode ?
5. Extension aux lentilles divergentes.

   Comment peut on appliquer les méthodes précédentes pour déterminer la distance focale d'une lentille divergente ?
