Electromagnétisme : magnétostatique (PCSI)

Exercice Champ magnétique crée par une spire

On considère une spire circulaire de rayon a parcourue par une intensité I. On note $\overrightarrow{u_z}$ l'axe de la spire.

1. Déterminez le champ magnétique crée en tout point de l'axe de cette spire.
2. On cherche à présent l'expression du champ magnétique à proximité de l'axe.
   (a) Montrez que le champ $\overrightarrow{B}$ est de la forme $B_r(r,z)\overrightarrow{u_r} + B_z(r,z)\overrightarrow{u_z}$.
   (b) On fait l'hypothèse suivante : la composante suivant l'axe de la spire reste constante à proximité de l'axe. Comment cette hypothèse modifie-t-elle la forme du champ ?
   (c) On considère un cylindre élémentaire, de rayon r, de hauteur dz et d'axe $\overrightarrow{u_z}$ situé entre z et $z+dz$. Déterminez le flux de $\overrightarrow{B}$ au travers de cette surface.
   (d) En déduire l'expression de $B_r(r,z)$.

Exercice Dipole magnétique & porte de frigo

1. Calculez le champ électrique crée à grande distance d'un dipole $\overrightarrow{p} = qa\overrightarrow{u_z}$.
2. Par analogie, justifiez l'expression du champ magnétique crée par un aimant $\overrightarrow{\mathcal{M}}$:
$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}\left(2cos\theta\overrightarrow{u_r} + sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right).$$
   Déterminez les lignes de champ.
3. Déterminez la force subie par un dipole $\overrightarrow{p}$ plongé dans un champ électrique extérieur.
4. Par analogie, exprimez la force subie par un dipole $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ magnétique extérieur.
5. Un aimant $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est placé à la surface d'un bloc métallique et aligné avec la normale à la surface $\overrightarrow{u_z}$. On admet que son aimantation crée en $C = (0,0,a_0)$ un dipole induit $\overrightarrow{\mathcal{M}_{ind}} = \beta\mu_0\overrightarrow{B}(C)$. Déterminez la force exercée par le bloc sur l'aimant. En déduire la masse maximale d'un magnet de moment $\mathcal{M}$ collé à un frigo. On notera f le coefficient de frottement statique entre l'aimant et la paroi.

Solution

1. $\frac{1}{NM} = \frac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM})}} = \frac{1}{OM}\left(1 - \frac{\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OM}}{OM^2}\right)$ *donc* $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM^3}\left(\overrightarrow{NP}.\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pcos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

   donc $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\begin{matrix} 2cos\theta/r^3 \\ sin\theta/r^3 \\ 0 \end{matrix}$

2. *Lignes de champ :* $\overrightarrow{dl} \parallel \overrightarrow{B}$ *donc* $\begin{matrix} dr \\ rd\theta \end{matrix} \wedge \begin{matrix} B_r \\ B_\theta \end{matrix} = 0$ *donc* $\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta}$ *ie* $\frac{dr}{r} = 2\frac{cos\theta d\theta}{sin\theta} = 2\frac{dsin\theta}{sin\theta}$ *donc* $r = r_0 sin^2\theta$

3. $\overrightarrow{F} = -q\overrightarrow{E(N)} + q\overrightarrow{E(P)} = q\left(\overrightarrow{E}(O+\overrightarrow{OP}) - \overrightarrow{E}(O+\overrightarrow{ON})\right)$
   $= q\left(\overrightarrow{E}(O) + \left(\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{E}(O) - \overrightarrow{E}(O) - \left(\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{E}(O)\right) = \left(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{E}(O)$

4. $\theta = 0$ *donc* $\overrightarrow{\mathcal{M}_{ind}} = \beta\mu_0 \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi a_0^3}\overrightarrow{u_z}$. *Ce M induit crée sur l'axe z un champ* $\overrightarrow{B_{induit}} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_{ind}}{4\pi r^3}\overrightarrow{u_z}$. *On a donc* $\mathcal{M}\left(\overrightarrow{u_z}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{B_{induit}} = \mathcal{M}\frac{3\mu_0 \mathcal{M}_{ind}}{4\pi a_0^4}$ *donc la force vaut* $\overrightarrow{F} = \frac{6\mu_0^2 \beta \mathcal{M}^2}{4\pi^2 a_0^7}$. *A la limite,* $fF = P$ *donc* $m_{max} = \frac{6\mu_0^2 \beta \mathcal{M}^2}{4\pi^2 a_0^7}\frac{f}{g}$

EXERCICE EFFET HALL

On considère un conducteur métallique dôté d'une densité d'électrons n. On modélisera les chocs des électrons sur le réseau ionique et sur ses impuretés par une force $\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$.

1. On soumet l'échantillon à un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E} = E_x\overrightarrow{u_x} + E_y\overrightarrow{u_y}$. Déterminez la densité de courant en régime stationnaire.
2. On ajoute à présent un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Exprimez la densité de courant en régime stationnaire.

Applications : On suppose le champ appliqué uniquement suivant E_x.

- Calculez l'angle entre la direction du champ électrique appliqué et la direction du courant résultant.
- Expérimentalement, on constate que sur un échantillon parallépipèdique, au bout d'un temps long, le courant j_y disparait. Interpretez.

Solution

1. $\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_x - \frac{v_x}{\tau} \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_y - \frac{v_y}{\tau} \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} \frac{d^2 j_x}{dt^2} = \frac{ne^2}{m}E_x - \frac{j_x}{\tau} \\ \frac{d^2 j_y}{dt^2} = \frac{ne^2}{m}E_y - \frac{j_y}{\tau} \end{cases}$ *et en stationnaire* $\begin{cases} j_x = \sigma_0 E_x \\ j_y = \sigma_0 E_y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_x - \frac{v_x}{\tau} - \frac{e}{m}B_0 v_y \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_y - \frac{v_y}{\tau} + \frac{e}{m}B_0 v_x \end{cases}$ *donc en stationnaire* $\begin{cases} \sigma_0 E_x = j_x + \frac{e\tau}{m}B_0 j_y \\ -\sigma_0 E_y = -j_y + \frac{e\tau}{m}B_0 j_x \end{cases}$. $\begin{vmatrix} 1 & \frac{e\tau}{m}B_0 \\ \frac{e\tau}{m}B_0 & -1 \end{vmatrix} = -\left(1 + \frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2\right)$ *donc*
3. $j_x = \frac{-1}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}\begin{vmatrix} \sigma_0 E_x & \frac{e\tau}{m}B_0 \\ -\sigma_0 E_y & -1 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_x - \frac{\sigma_0 \frac{e\tau}{m}B_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_y$ *et* $j_y = \frac{-1}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}\begin{vmatrix} 1 & \sigma_0 E_x \\ \frac{e\tau}{m}B_0 & -\sigma_0 E_y \end{vmatrix} = \frac{\sigma_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_y + \frac{\sigma_0 \frac{e\tau}{m}B_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_x$
