Moment cinétique

EXERCICE MODÈLE ATOMIQUE DE BOHR

On considère le modèle atomique de Bohr : un électron M de masse m_e et de charge $-e$ tourne autour d'un noyau N de masse m_n et de charge $+ne$. On considère que $m_n \gg m_e$ et que le noyau est par conséquent immobile (approximation de Bohr - Oppenheimer). On rappelle que le champ crée par une charge poncutelle Q vaut $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$.

1. Quelles forces s'appliquent sur l'électron ? Justifiez qu'on puisse négliger le poids.
2. Montrez que la force subie par l'électron dérive d'un potentiel $E_p(r)$ que l'on déterminera.
3. Montrez que le mouvement de l'électron est plan et déterminez une relation entre r et $\dot{\theta}$.
4. On suppose que le mouvement de l'électron est circulaire. Montrez que l'accélération s'écrit alors $\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{u_r}$ et en déduire la relation
$$E_m = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r}$$
5. L'hypothèse de Bohr consiste à quantifier le moment cinétique : on suppose que $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $||\sigma|| = p\frac{h}{2\pi} = p\hbar$. En déduire une relation entre $\dot{\theta}$, r et p.
6. Montrez que la distance de l'électron au noyau se met sous la forme $r = p^2 r_0$ et que l'énergie de l'électron se met alors sous la forme $E_n = -\frac{E_0}{p^2}$.

Applications

- Déterminez l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène.
- Un atome sur un état d'énergie élevé peut redescendre vers un niveau plus fondamental en émettant un photon.
  - A l'aide d'une loi de conservation, exprimez l'énergie du photon émis par un électron passant du niveau p au niveau $q < p$.
  - Déterminez la fréquence de ce photon.
  - Tracez l'allure du spectre obtenu par l'ensemble des transitions $p \to 1$ (série de Lyman).

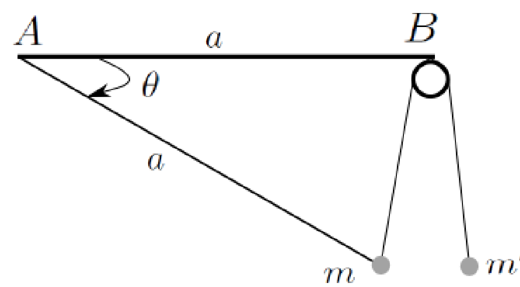
Solution

1. *Forces : poids $mg \simeq 9.10^{-31} \times 10 \simeq 10^{-29}N$ force électrique eE avec $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze}{r^2} \simeq 9.10^9\frac{10^{-19}}{10^{-20}} = 10^{11}Vm^{-1}$, $eE \simeq 10^{-8}N$*
2. *$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ donc $-dE_p = \delta W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}dr = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}d\left(\frac{1}{r}\right)$ donc $E_p = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$ (avec $E_p(+\infty) = 0$)*
3. *Seule force considérée : $-e\overrightarrow{E}$ dont le moment par rapport à N vaut $-e\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{E} = -erE\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_r} = 0$ donc le TMC donne $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$. Le fait que la direction de $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$ soit constante implique que ces deux vecteurs sont toujours contenus dans le même plan (car $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$ est othogonal au plan qui les contient tous les deux) donc le mouvement est plan. D'autre part, en coordonnées polaires, $\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} = (r\overrightarrow{u_r}) \wedge \left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ donc $r^2\dot{\theta} = cste$.*
4. *$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\dot{\theta}^2 + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$. Pour un mouvement circulaire, $\dot{r} = 0$ donc $\dot{\theta} = cste$ d'après la relation $r^2\dot{\theta} = cste$ et $\overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. On a donc bien $\overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{u_r}$. Le PFD donne alors $-m\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}$ donc $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$ et $E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$ donc $E_m = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r}$*

5. $mr^2\dot{\theta} = p\hbar \Leftrightarrow m^2r^4\dot{\theta}^2 = p^2\hbar^2$ *(moment cinétique) et* $mr\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} \Leftrightarrow mr^3\dot{\theta}^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$ *donc* $r = p^2\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2m}$ *et* $E_m = -\frac{Z^2e^4m}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{p^2}$

Exercice Conditions d'équilibre

Un point de masse m est relié par un fil de longueur a au point A immobile. Il est également relié au point N de masse m' au travers d'une poulie placée en B, à une distance a du point A. On considère que les fils sont inextensibles et sans masse. On considère que la poulie est parfaite et petite.



- Etablir un bilan des forces s'exerçant sur M.
- Etablir un bilan des forces s'exerçant sur N et en déduire l'expression d'une des forces de tension exercées sur M à l'équilibre.
- Determinez le moment des forces appliques sur M par rapport à A en fonction de l'angle θ.
- Déterminez une condition sur m et m' pour qu'un équilibre existe. Que vaut alors l'angle θ ?
