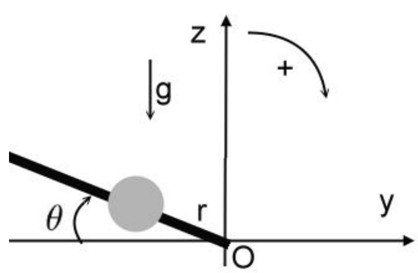
Mécanique du point : référentiels non Galiléens (PCSI)

Exercice Ball trap

On s'intéresse au fonctionnement d'un ball-trap : un pigeon assimilé à un point M de masse m est placé sur une barre de longueur L tournant à la vitesse constante ω et sur laquelle il est contraint de glisser sans frottement. A $t = 0$, l'axe forme un angle $\theta = 0$ avec l'horizontale et le pigeon est à une distance r_0 du centre de rotation.



1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur le pigeon. En déduire l'équation vérifiée par la distance r.
2. Sous quelles conditions peut on négliger la force de gravitation ? On fera cette hypothèse par la suite.
3. Résoudre l'équation obtenue dans la première question. Comment vérifier l'hypothèse utilisée ?
4. A quel instant le pigeon quitte-t-il le lanceur ? Quelle est alors sa position ? Sa vitesse ?
5. Déterminez la valeur de L permettant de lancer le pigeon avec un angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.
6. Déterminez la suite de son mouvement et tracez l'ensemble de sa trajectoire.

Un ascenceur se déplace du 1^{er} au 42^{eme} étage en 3 phases : il accélère uniformément à $a_0\, m.s^{-2}$, puis se déplace à vitesse constante, puis déccélère à $-a_0\, m.s^{-2}$. Une masse m est posée sur un pèse personne à l'intérieur de l'ascenseur.

1. Qu'indique le pèse-personne dans chacun des trois phases ?
2. Qu'indiquerait le pèse-personne si on coupait les cables et que l'ascenseur tombait en chute libre ?

Exercice Accéléromètre de fortune

Joe Runner sortait de chez lui quand un groupe cagoulé l'a attrapé et enfermé dans un camion. Le camion roule sur une route droite, horizontale. Joe runner veut savoir où on l'emmène : il veut pour cela déterminer l'accélération du camion. Avec un lacet de longueur l et sa montre de masse m, il fabrique un pendule et cherche à l'utiliser pour déterminer la valeur a de l'accélération.

1. Déterminez la position d'équilibre du pendule dans le référentiel du camion.
2. Déterminez la trajectoire du pendule autour de sa position d'équilibre en considérant l'accélération a constante.

Il est ensuite mis à bord d'un GMC Banshee, un appareil à poussée vectorielle qui décole verticalement.

1. Déterminez la position d'équilibre du pendule dans le référentiel du véhicule.
2. Déterminez la trajectoire du pendule autour de sa position d'équilibre en considérant l'accélération a constante.

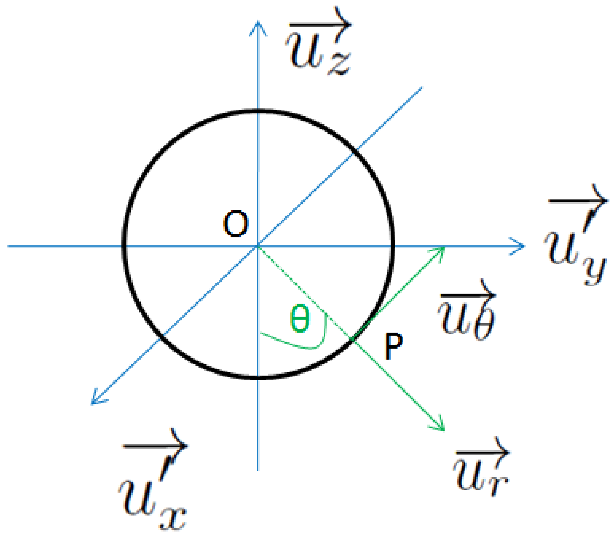
Un cerceau de rayon a tourne autour de son diamètre suivant un vecteur de rotation instantanné $\overrightarrow{\Omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$ dans le référentiel $R_G = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ supposé galiléen. On note $R_{NG} = (\overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel non galiléen lié au cerceau.

Sur ce cerceau une perle glisse sans frotter. On la repère par l'angle θ formé avec la verticale. On note $R_P = (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e'_y})$ le référentiel non galiléen polaire dans le référentiel R_{NG}.

1. Représentez les différents référentiels et détaillez leurs mouvements relatifs.
2. Faites un bilan des forces qui s'appliquent sur la perle.
3. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par θ. Quelle équation vérifie l'angle θ à l'équilibre ?

Solution

Dans R_{NG} (repère bleu) en rotation à la vitesse angulaire Ω autour de $\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u'_z}$ dans R_G (non représenté), on cherche la position d'équilibre.



Méthode dynamique

- *Bilan des forces :*
  - *Poids :* $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\left(cos\theta\overrightarrow{u_r} - sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right)$
  - *Réaction :* $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{u_r}$
  - *Force d'inertie d'entrainement :* $\overrightarrow{F_{ie}} = mRsin\theta\Omega^2\overrightarrow{u'_y} = mRsin\theta\Omega^2\left(sin\theta\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\right)$
  - *Force d'inertie de Coriolis : nulle à l'équilibre.*
- *PFD projeté suivant $\overrightarrow{u_\theta}$:*

$$\begin{aligned} 0 &= -mgsin\theta + mRsin\theta\Omega^2 cos\theta \\ 0 &= \left(cos\theta - \frac{g}{R\Omega^2}\right) R\Omega^2 sin\theta \end{aligned}$$

d'où on déduit l'existence de 3 positions d'équilibre : $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et $cos\theta = \frac{g}{\Omega^2 R}$ ssi $\frac{g}{\Omega^2 R} < 1$.

Etude de la stabilité

On sait que pour un mouvement de rotation pure, la force d'inertie d'entrainement découle d'un potentiel. On a donc une énergie potentielle totale $E_p(\theta)$ et une force $-mgsin\theta + mRsin\theta\Omega^2 cos\theta = F_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial E_p}{\partial\theta}$. Une position d'équilibre est caractérisée par $\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = 0$. Une position stable est caractérisée par $\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2} > 0$. Une position instable est caractérisée par $\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2} < 0$.

La stabilité des positions d'équilibre est donc donnée par la dérivée seconde de l'énergie potentielle, c'est à dire

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = mgRcos\theta - mR^2\Omega^2\left(cos^2\theta - sin^2\theta\right)$$

- *Position en* $\theta = 0$
$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_0 = mgR - mR^2\Omega^2 = mR\left(\frac{g}{R\Omega^2} - 1\right)$$
cette position est donc stable ssi $\frac{g}{R\Omega^2} > 1$ *ie* $\Omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$
- *Position en* $\theta = \pi$
$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_0 = -mgR - mR^2\Omega^2 = -mR\left(\frac{g}{R\Omega^2} + 1\right) < 0$$
cette position est donc toujours instable.
- *Position en* $cos\theta = \frac{g}{\Omega^2 R}$
$sin^2\theta = 1 - cos^2\theta = 1 - \frac{g^2}{\Omega^4 R^2}$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_0 &= mgR\frac{g}{\Omega^2 R} - mR^2\Omega^2\left(\frac{g^2}{\Omega^4 R^2} - \left(1 - \frac{g^2}{\Omega^4 R^2}\right)\right)\\ &= m\left(\frac{g^2}{\Omega^2} - \left(2\frac{g^2}{\Omega^2} - R^2\Omega^2\right)\right)\\ &= mR^2\Omega^2\left(1 - \frac{g^2}{R^2\Omega^4}\right)\end{aligned}$$

cette position est donc stable stable ssi $\frac{g}{R\Omega^2} < 1$ *ie* $\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$

Résumé

	$\Omega < \sqrt{\frac{g}{R}}$	$\Omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$
$\theta = 0$	*équilibre stable*	*équilibre instable*
$\theta = \pi$	*équilibre instable*	*équilibre instable*
$cos\theta = \frac{g}{\Omega^2 R}$	*pas d'équilibre*	*équilibre stable*

Un cerceau de rayon a tourne autour de la tangente à son rayon, suivant un vecteur de rotation instantanné $\overrightarrow{\Omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$ dans le référentiel $R_G = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ supposé galiléen. On note $R_{NG} = (\overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e_z})$ le référentiel non galiléen lié au cerceau.

Sur ce cerceau une perle glisse sans frotter. On la repère par l'angle θ formé avec la verticale. On note $R_P = (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e'_y})$ le référentiel non galiléen polaire dans le référentiel R_{NG}.

1. Représentez les différents référentiels et détaillez leurs mouvements relatifs.
2. Faites un bilan des forces qui s'appliquent sur la perle.
3. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par θ. Quelle équation vérifie l'angle θ à l'équilibre ?

Une boite M de masse m est posée sur une voiture qui roule sur une route bosselée, qu'on modélisera par une sinusoïde $z = e\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$.

La voiture roule à une vitesse v constante dans la direction x et on suppose ses amortisseurs complètement rigide.

A partir de quelle vitesse v la boite n'est-elle plus en permanence en contact avec la voiture ?

Solution

On se place dans le référentiel de la voiture.

Bilan des forces suivant z :
- Poids $P = -mg$
- Réaction R
- Force d'inertie d'entrainement $F_{ie} = -m\ddot{z} = mv^2 e\frac{4\pi^2}{L^2}\cos(vt/L)$

A faible vitesse, la caisse est immobile. On cherche la valeur de v pour laquelle la réaction peut s'annuler au cours du temps. le PFD donne $0 = R - mg + mv^2 e\frac{4\pi^2}{L^2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}vt\right)$ donc $R = mg + mv^2 e\frac{4\pi^2}{L^2}\cos\left(\frac{2\pi}{L}vt\right)$. La valeur minimale que prend R au cours du temps est $R_{min} = mg - mv^2 e\frac{4\pi^2}{L^2}$, qui s'annule pour $v = v_c = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{e}}$

On se place dans le référentiel terrestre $R_T = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ à une latitude λ, à la surface de la Terre. On tient compte du mouvement de rotation de la Terre, mais pas de son mouvement de révolution. Le référentiel géocentrique $R_G = (\overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e'_z})$ est donc supposé galiléen.

On envoie vers le haut une balle M de masse m avec une vitesse initiale $v_0\overrightarrow{e'_z}$.

1. Représentez les deux référentiels et détaillez leurs mouvements relatifs. Exprimez en particulier le vecteur rotation instantané
2. Faites un bilan des forces qui s'exercent sur la balle.
3. Dans une première approche, on néglige les effets non galiéens. Déterminez les équations horaires du mouvement.
4. On considère que les effets non galiléens vont perturber le mouvement précédent. Exprimez la déviation que subit la balle.

Exercice Pendule de Foucault

On se place dans le référentiel terrestre $R_T = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ à une latitude λ, à la surface de la Terre. On tient compte du mouvement de rotation de la Terre, mais pas de son mouvement de révolution. Le référentiel géocentrique $R_G = (\overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e'_z})$ est donc supposé galiléen.

Un pendule M de longueur l et de masse m est attaché à une altitude h et laché avec un angle θ_0 dans le plan $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$.

1. Exprimez dans la base cartésienne le bilan des forces, puis les équations différentielles vérifiées par les coordonées x, y et z.
2. On suppose le moment uniquement horizontal. En déduire l'expression de la force de tension.
3. On pose $u = x + jy$ où $j^2 = -1$. Exprimez l'équation différentielle vérifiée par u et résolvez la.
4. Déterminez les équations horaires du mouvement.
