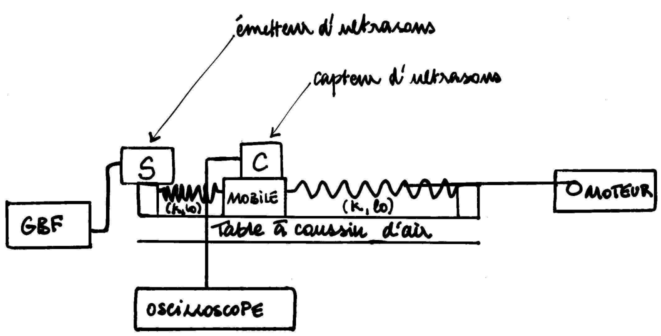
Mécanique du point : oscillations forcées (PCSI)

Exercice Modèle atomique de Thomson

On considère le modèle atomique de Thomson : un électron se trouve à une distance d'équilibre du noyau. Il est ramené à sa position d'équilibre par une force de rappel élastique $\overrightarrow{R} = -k\overrightarrow{r}$. Lors de son déplacement, l'électron subit également une force $\overrightarrow{F} = -h\frac{d^3}{dt^3}\overrightarrow{r}$ dite *Brehmstrallung* et qui traduit ses interactions avec le son propre champ.

L'électron est initialement au repos. A partir de $t = 0$, il est soumis à un champ électrique de la forme $\overrightarrow{E} = E_0 cos\,(\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, exprimez l'équation différentielle vérifiée par le déplacement $\overrightarrow{r}$ de l'électron.
2. On cherche à présent à résoudre cette équation différentielle. En supposant $k \gg h$, déterminez la forme de la solution de l'équation homogène. Que devient-elle quand $t \to +\infty$?
3. En considérant un régime sinusoïdal forcé, déterminez une relation entre $\underline{r}$ et E_0.
4. On considère que le champ électrique provient de la lumière du soleil. En quoi cette hypothèse permet-elle de simplifier l'expression de $\underline{r}$? Déterminez alors la forme de la solution de l'équation différentielle au bout d'un temps long.
5. Calculez la puissance moyenne dissipée par l'électron au cours de son mouvement.
6. Expliquez pourquoi le ciel est bleu.



On considère un mobile auto-porteur relié à deux ressorts identiques de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Leurs points d'attache fixes sont distants d'une distance d. Un moteur impose une force excitatrice $\overrightarrow{F} = F_0 cos\,(\omega t)\,\overrightarrow{U_x}$ et les frottements fluides sont modélisés par une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\dot{x}\overrightarrow{U_x}$.

1. Exprimez l'équation différentielle vérifiée par la position x.
2. Montrez que l'équation se met sous la forme $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = H_0 cos\,(\omega t)$.
3. Exprimez l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\dot{X}$.
4. En utilisant les notations complexes, exprimez $\underline{\dot{X}}$.
5. On se place à $\omega = \omega_0$. Quelle est alors l'expression de $\dot{x}$?
6. Comment déterminer expérimentalement les constantes H_0 et α ?

Exercice Dissociation moléculaire

On s'intéresse à la rupture d'une molécule diatomique sous l'effet d'un champ électrique. On modélise la molécule par un couple de masses m reliées par un ressort de constante de raideur k et on note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

On considère que l'atome 1 reste immobile et que seul l'atome 2 se déplace. On note $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$. On considère que la molécule est rompue si $r > R$.

Pour modéliser la polarisation de la liaison, on supposera que l'atome 2 porte une charge électrique q. On se placera dans la suite du problème en régime forcé stationnaire établi.

1. La molécule est soumise à un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_0 cos\left(\omega_0 t\right) \overrightarrow{e_x}$.
   (a) Montrez en quoi une solution de la forme particulière de la forme $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$ ne peut pas convenir.
   (b) On cherche la solution sous la forme $\overrightarrow{r} = \left(A cos\left(\omega_0 t\right) + B sin\left(\omega_0 t\right)\right) t\, \overrightarrow{e_x}$. Déterminez A et B.
   (c) Quelle valeur minimale doit avoir le champ $\overrightarrow{E}$ pour rompre la molécule ?
2. On modifie à présent le modèle de la molécule pour faire apparaitre un facteur de qualité Q .
   (a) Déterminez l'expression de $\overrightarrow{r}$.
   (b) Quelle valeur minimale doit avoir le champ $\overrightarrow{E}$ pour rompre la molécule ?

Solution

En régime stationnaire, on suppose que la composante issue de l'équation homogène a disparu et on ne considère plus que la contribution de la solution particulière. Par conséquent, on ne tiendra aucun compte des conditions initiales, disparues avec le régime transitoire.

1. *Recherche d'une solution particulière dans le cas parfait*
   On cherche donc à trouver une solution particulière, en imaginant une forme de solution et en vérifiant que cette forme est acceptable (raisonnement dit Analyse - Synthèse *en maths).*
   (a) *Première tentative*
   La position de l'atome 2 vérifie l'équation différentielle imposée par le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} &= -k\overrightarrow{r} + q\overrightarrow{E} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} + \omega_0^2\overrightarrow{r} &= \frac{qE_0}{m}\cos\left(\omega_0 t\right)\overrightarrow{e_x} \end{aligned}$$

   Supposons qu'il existe une solution de la forme $\overrightarrow{r_p}(t) = \overrightarrow{r_0}\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$. Injectons cette solution dans l'équation différentielle ci dessus pour déterminer la valeur du paramètre $\overrightarrow{r_0}$:

$$-\omega_0^2\overrightarrow{r_0}\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) + \omega_0^2\overrightarrow{r_0}\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) = \frac{qE_0}{m} cos\left(\omega_0 t\right)\overrightarrow{e_x}$$

   ce qui n'est possible que si $E_0 = 0$. Par conséquent, la forme de solution proposée a priori *n'est pas acceptable pour ce problème.*
   (b) *Seconde tentative*
   Supposons qu'il existe une solution de la forme $\overrightarrow{r_p}(t) = \left(A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right)\right) t\,\overrightarrow{e_x}$.
   On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{r_p}}{dt} &= \left(A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) - A\omega_0 t\sin\left(\omega_0 t\right) + B\omega_0 t\cos\left(\omega_0 t\right)\right)\overrightarrow{e_x} \\ \frac{d^2\overrightarrow{r_p}}{dt^2} &= \left(-2A\omega_0\sin\left(\omega_0 t\right) + 2B\omega\cos\left(\omega_0 t\right) - A\omega_0^2 t\cos\left(\omega_0 t\right) - B\omega_0^2 t\sin\left(\omega_0 t\right)\right)\overrightarrow{e_x} \end{aligned}$$

   et en injectant la forme de la solution dans l'équation différentielle,

$$\begin{gathered} \left(-2A\omega_0\sin\left(\omega_0 t\right) + 2B\omega\cos\left(\omega_0 t\right) - A\omega_0^2 t\cos\left(\omega_0 t\right) - B\omega_0^2 t\sin\left(\omega_0 t\right)\right) + \\ \omega_0^2\left(At\cos\left(\omega_0 t\right) + Bt\sin\left(\omega_0 t\right)\right) = \frac{qE_0}{m}\cos\left(\omega_0 t\right) \end{gathered}$$

Pour que cette équation soit vraie $\forall t$, on doit avoir, à cause de la liberté des familles trigonométriques,

$$\begin{aligned} 2B\omega\cos(\omega_0 t) &= \frac{qE_0}{m}\cos(\omega_0 t) \\ -2A\omega_0\sin(\omega_0 t) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui impose

$$\begin{aligned} B &= \frac{qE_0}{2m\omega} \\ A &= 0 \end{aligned}$$

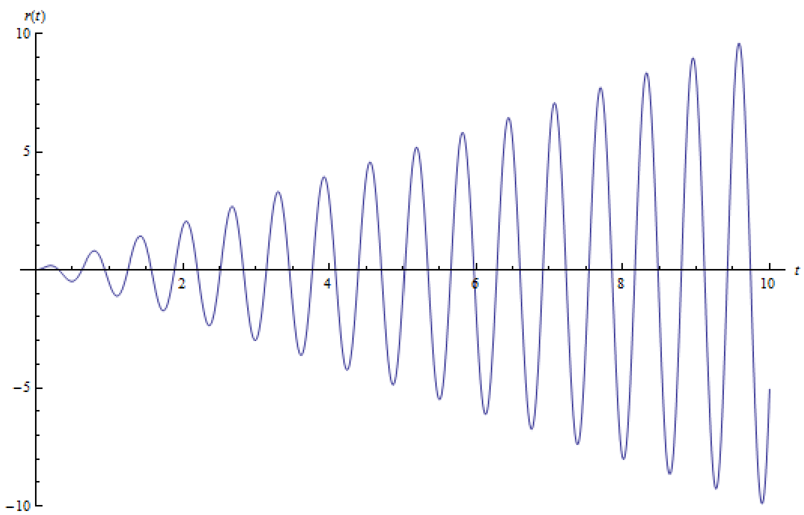


FIGURE *1 – Forme qualitative de la solution particulière (unités arbitraires).*

(c) *Quelque soit le champ $E_0 \neq 0$ imposé, la distance $|\overrightarrow{r}(t)|$ n'est pas bornée. Il existe donc nécessairement un instant τ tel que $|\overrightarrow{r}(\tau)| > R$ pour tout champ E_0 arbitrairement petit.*

2. *Recherche d'une solution particulière dans le cas avec pertes*

(a) *Forme de la solution particulière*

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'atome 2 donne, en tenant compte du coefficient de qualité,

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} + \omega_0^2\overrightarrow{r} = \frac{q}{m}E_0\cos(\omega_0 t)\,\overrightarrow{e_x}$$

On cherche à nouveau une forme mathématique pour la solution particulière. On peut envisager une solution de la forme $\overrightarrow{r_p}(t) = \overrightarrow{r_0}\cos(\omega_0 t + \varphi)$. En passant en notations complexes, on obtient l'équation

$$-\omega_0^2\overrightarrow{r_0}e^{i(\omega_0 t+\varphi)} + i\frac{\omega_0^2}{Q}\overrightarrow{r_0}e^{i(\omega_0 t+\varphi)} + \omega_0^2\overrightarrow{r_0}e^{i(\omega_0 t+\varphi)} = \frac{q}{m}E_0 e^{i\omega_0 t}\overrightarrow{e_x}$$

d'où on déduit

$$i\frac{\omega_0^2}{Q}\overrightarrow{r_0}e^{i\varphi} = \frac{q}{m}E_0\overrightarrow{e_x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \overrightarrow{r_0} &= \frac{q}{m\omega_0^2}QE_0\overrightarrow{e_x} \\ \varphi &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right.$$

(b) *Le mouvement est d'amplitude constante. Pour rompre la liaison, on doit donc avoir*

$$\begin{array}{rccc} & |\overrightarrow{r_0}| & \geq & R \\ \Leftrightarrow & \frac{q}{m\omega_0^2}QE_0 & \geq & R \\ \Leftrightarrow & E_0 & \geq & \frac{m\omega_0^2 R}{qQ} \end{array}$$