Electromagnétisme : mouvement de particules chargées (PCSI)

EXERCICE EFFET HALL

On considère un conducteur métallique dôté d'une densité d'électrons n. On modélisera les chocs des électrons sur le réseau ionique et sur ses impuretés par une force $\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$.

1. On soumet l'échantillon à un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E} = E_x\overrightarrow{u_x} + E_y\overrightarrow{u_y}$. Déterminez la densité de courant en régime stationnaire.
2. On ajoute à présent un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Exprimez la densité de courant en régime stationnaire.

Applications : On suppose le champ appliqué uniquement suivant E_x.

- Calculez l'angle entre la direction du champ électrique appliqué et la direction du courant résultant.
- Expérimentalement, on constate que sur un échantillon parallépipèdique, au bout d'un temps long, le courant j_y disparait. Interpretez.

Solution

1. $\begin{cases} \frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_x - \frac{v_x}{\tau} \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_y - \frac{v_y}{\tau} \end{cases}$ *donc* $\begin{cases} \frac{d^2j_x}{dt^2} = \frac{ne^2}{m}E_x - \frac{j_x}{\tau} \\ \frac{d^2j_y}{dt^2} = \frac{ne^2}{m}E_y - \frac{j_y}{\tau} \end{cases}$ *et en stationnaire* $\begin{cases} j_x = \sigma_0 E_x \\ j_y = \sigma_0 E_y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_x - \frac{v_x}{\tau} - \frac{e}{m}B_0v_y \\ \frac{d^2v_y}{dt^2} = -\frac{e}{m}E_y - \frac{v_y}{\tau} + \frac{e}{m}B_0v_x \end{cases}$ *donc en stationnaire* $\begin{cases} \sigma_0E_x = j_x + \frac{e\tau}{m}B_0j_y \\ -\sigma_0E_y = -j_y + \frac{e\tau}{m}B_0j_x \end{cases}$. $\begin{vmatrix} 1 & \frac{e\tau}{m}B_0 \\ \frac{e\tau}{m}B_0 & -1 \end{vmatrix} = -\left(1 + \frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2\right)$ *donc*
3. $j_x = \frac{-1}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}\begin{vmatrix} \sigma_0E_x & \frac{e\tau}{m}B_0 \\ -\sigma_0E_y & -1 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_x - \frac{\sigma_0\frac{e\tau}{m}B_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_y$ *et* $j_y = \frac{-1}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}\begin{vmatrix} 1 & \sigma_0E_x \\ \frac{e\tau}{m}B_0 & -\sigma_0E_y \end{vmatrix} = \frac{\sigma_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_y + \frac{\sigma_0\frac{e\tau}{m}B_0}{1+\frac{e^2\tau^2}{m^2}B_0^2}E_x$

QUESTION DE COURS

Montrez qu'une particule de charge q placée dans un champ $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r})$ acquiert une énergie potentielle.

EXERCICE PIÈGE DE PENNING

1. On cherche à piéger une particule de masse m et de charge q en utilisant un champ électrique $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

   On considère tout d'abord $V(\overrightarrow{r}) = V_0\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right)$. Montrez que la particule n'a pas de position d'équilibre stable.
2. On ajoute un champ magnétique de la forme $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix}$

   (a) Montrez que la trajectoire de la particule vérifie le système différentiel

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega^2}{2} & \omega_c & 0 \\ -\omega_c & \frac{\omega^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où on exprimera les pulsations ω et ω_c.

(b) Résoudre l'équation du mouvement selon z.

(c) On pose $\xi = x + iy$. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par ξ

(d) On supposera par la suite $\omega \ll \omega_c$. En déduire l'expression de ξ.

(e) En déduire que la particule reste piégée dans le piège de Penning.

Exercice Accélérateur cylcotron

On cherche à construire un accélérateur de particules. Pour cela, on sépare l'espace en 3 parties.

- Zone 1 : entre $x = -\infty$ et $x = 0$, on applique un champ $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{U_z}$
- Zone 2 : entre $x = 0$ et $x = L$, on applique un champ $\overrightarrow{E} = E(t)\overrightarrow{U_x}$
- Zone 3 : entre $x = L$ et $x = +\infty$, on applique un champ $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{U_z}$

On s'intéresse au mouvement d'une particule chargée de masse m et de charge q, initialement placée sans vitesse en $x = 0$.

1. On considère que le champ électrique $E(t)$ est constant et positif. Déterminez le mouvement de la particule jusqu'à ce qu'elle quitte la zone 2.
2. Déterminez le mouvement de la particule dans la zone 3.
3. Quel champ $E(t)$ faut il appliquer pour accélérer au mieux la particule ?

Question de cours

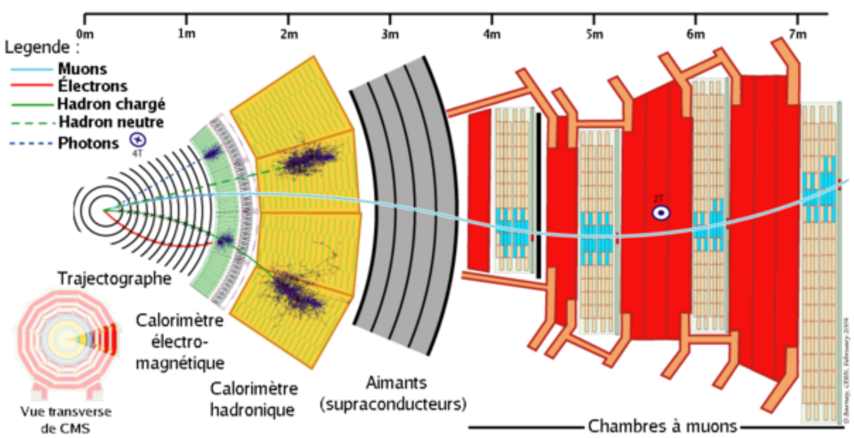
Effet d'un champ magnétique sur une particule chargée.

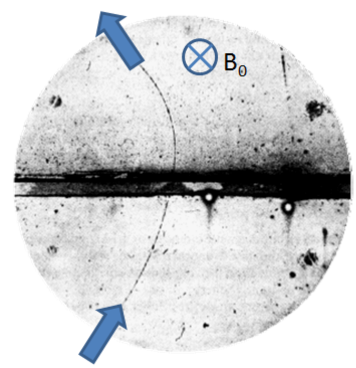
Exercice Détection de particules & découverte du positron

Lors d'un choc proton - proton ou noyau - noyau, réalisé dans un accélérateur, de très nombreuses particules chargées sont émises depuis le point de collision, appelé *vertex*. Ces particules partent avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ initiale et entrent dans un détecteur où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Elles déposent sur leur passage une trace qui permet de visualiser leur trajectoire.

1. Montrez que l'énergie de la particule est conservée au cours de son mouvement.
2. Montrez que, si on mesure l'énergie E de la particule, l'étude de la trace permet de déterminer le signe de sa charge q et le quotient $\frac{\sqrt{m}}{q}$.
3. En 1932, Anderson a réalisé une expérience semblable à celle étudiée ci dessus. Pour déterminer la masse des particules, il a rajouté sur leur trajectoire des particules une plaque de plomb de e =6 mm et obtenu le cliché ci dessous. On peut relier l'énergie perdue par une particule traversant une telle plaque à sa masse : $\Delta E = \alpha e m$, où $\alpha = 13\,MeV\,mm^{-1}\,kg^{-1}$.

   Le rayon de courbure avant la plaque vaut $R_i =$; le rayon de courbure après la plaque vaut $R_f = 1.7\,cm$. L'énergie mesurée au bout de la trajectoire vaut $E_f = 23MeV$. Déterminez la valeur de ΔE et en déduire celle de m, puis de q. Expliquez pourquoi cette découverte a valu le prix Nobel à Anderson.





Solution

1. *PFD :* $\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_0}{m}v_y$ *et* $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_0}{m}v_x$ *donc avec* $u = v_x + iv_y$, $\frac{du}{dt} = -i\frac{qB_0}{m}u$ *donc* $u = u_0e^{-i\frac{qB_0}{m}t}$ *et on en déduit* $v_x = v_0cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)$ *et* $v_y = -v_0sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)$ *donc* $x = \frac{mv_0}{qB_0}sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)+x_0$ *et* $y = \frac{mv_0}{qB_0}cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)+y_0$.
2. *Conservation de l'énergie :* $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_F = q\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{v} = 0$
3. *La trace a un rayon* $R = \frac{mv_0}{qB_0}$*; avec* $E = \frac{1}{2}mv_0^2$*, on a* $R = \frac{\sqrt{2E}}{B_0}\frac{\sqrt{m}}{q}$.
4. $\frac{q}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{2E_f}}{R_fB_0}$ *donc* $E_i = \frac{B_0^2R_i^2}{2}\frac{q^2}{m} = \frac{B_0^2R_i^2}{2}\frac{2E_f}{R_f^2B_0^2} = E_1\frac{R_i^2}{R_f^2}$ *donc* $\Delta E = E_f\left(\frac{R_i^2}{R_f^2}-1\right) = 702.10^{-31}MeV$*, donc* $m = \frac{\Delta E}{\alpha e} = 9.10^{-31}$