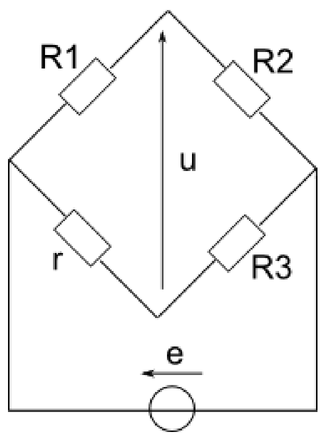
Electronique : régime sinusoïdal forcé (PCSI)

Les ponts sont des montages qui permettent, en faisant varier la valeur d'impédance de certains dipoles, de déterminer l'impédance de dipoles inconnus. On dit que le pont est équilibré si $u = 0$.

La méthode de résolution est systématiquement la même, on se propose donc de la mettre en place sur un exemple simple, puis de l'appliquer à un cas plus complexe.

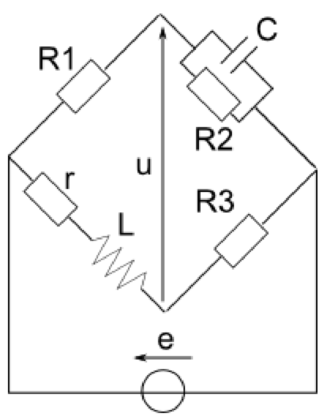
Pont de Wheatstone.



La résistance r est inconnue ; les résistances $R_2 = 70\,\Omega$ et $R_3 = 2.5\,\mathrm{k}\Omega$ sont fixées et on peut faire varier la valeur de R_1.

1. Exprimez la tension u en fonction de e et des différentes résistances.
2. On fait varier la valeur de R_1 jusqu'à ce que le pont soit équilibré. On mesure la valeur de $R_1 = 1.5\,\mathrm{k}\Omega$. Que vaut la résistance r ?

Pont de Maxwell



On considère à présent le montage suivant, dans lequel la valeur L d'impédance de la bobine et la résistance r sont inconnues. On peut faire librement varier R_1, tandis que les autres valeurs sont connues. Lorsque le pont est équilibré On a $R_1 = 1\,k\Omega$, $R_2 = 42\,\mathrm{k}\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$ et $C = 5\,nF$. Déterminez L et r.

Correction

Maxwell :

$U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1+Z_{eq}}e$ *avec* $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega$ *donc* $U_{R_1} = \frac{R_1}{R_1+\frac{R_2}{1+jR_2C\omega}}e = \frac{R_1+jR_1R_2C\omega}{R_1+R_2+jR_1R_2C\omega}$

$U_{Lr} = \frac{r+jL\omega}{R_3+r+jL\omega}e$. *En équilibrant les deux tensions (partie réelle et partie imaginaire), on trouve* $r = \frac{R_1R_3}{R_2}$ *et* $L = R_1R_3C$

On utilise un générateur de tension réel, de force électromotrice $E(t) = E_0 \sin \omega t$ et de résistance interne R_0. On branche à ses bornes un dipole d'impédance $Z = R + iL\omega$; on notera $U(t)$ la tension à ses bornes. Dans l'ensemble de l'exercice, on se placera dans le cadre de l'approximation des régimes quasti stationnaires.

1. Exprimer la forme générale de l'intensité $I(t)$ qui parcourt le circuit, puis exprimez l'amplitude, la valeur efficace et le déphasage de l'intensité.
2. Exprimez la puissance $\mathcal{P}$ moyenne reçue par l'impédance Z.
3. On suppose dans cette question que le dipole est une résistance pure. Montrez que, pour une certaine valeur R_m de la résistance, la puissance reçue par l'impédance présente un maximum.

   Application numérique $E_{eff} = 220\,\mathrm{V}$, $R_0 = 10\,\Omega$, $\frac{\omega}{2\pi} = 50\,\mathrm{Hz}$
4. On suppose à présent que l'inductance a une valeur fixée $L = 0.1\mathrm{H}$. Montrez que la puissance dissipée par l'impédance totale est toujours inférieure à celle dissipée par en l'absence d'inductance. Déterminez la nouvelle résistance R'_m qui maximise la puissance dissipée.

Correction

1. $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I)$. *Par loi des mailles,* $\underline{E}(t) = \underline{I}(t)Z + \underline{I}(t)R_0 \Leftrightarrow E_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = I_0 e^{i(\omega t + \pi/2 + \varphi_I)}\,(R_0 + R + iL\omega)$; *donc* $I_0 e^{i\varphi_I} = \frac{E_0}{R+R_0+iL\omega} = E_0 \frac{R+R_0-i\omega L}{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}$.
   On a donc : amplitude : $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}}$; *valeur efficace :* $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$; *déphasage :* $\cos\varphi_I = \frac{R+R_0}{\sqrt{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}}$ $\sin\varphi_I = \frac{-\omega L}{\sqrt{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}}$
2. *Par définition,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \langle I(t)U(t)\rangle \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T I_0 \sin(\omega t + \varphi_I) U_0 \sin(\omega t + \varphi_U) \\
&= I_0 U_0 \frac{1}{2T}\int \left(\cos(\varphi_U - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)\right) \\
&= \frac{I_0 U_0}{2}\cos(\varphi_U - \varphi_I)
\end{aligned}$$

   . *Avec* $U_0 e^{i\varphi_U} = \underline{Z} I_0 e^{i\varphi_I}$, *on trouve* $U_0 = I_0\sqrt{R^2+L^2\omega^2}$ *et* $\cos(\varphi_U - \varphi_I) = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$ *et* $\sin(\varphi_U - \varphi_I) = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$. *On trouve ainsi* $\mathcal{P} = \frac{RI_0^2}{2} = \frac{RE_{eff}^2}{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}$.
3. *Pour* $L = 0$, $\mathcal{P} = \frac{R}{(R+R_0)^2}E_{eff}^2$. $\frac{d\mathcal{P}}{dR} = \frac{(R+R_0)^2 - 2R(R+R_0)}{(R+R_0)^4} = 0 \Leftrightarrow R + R_0 - 2R = 0 \Leftrightarrow R = R_0$. *On a alors* $\mathcal{P} = \frac{E_{eff}^2}{4R_0} = 1.2\,\mathrm{MW}$.
4. *A présent,* $\mathcal{P}' = \frac{RE_{eff}^2}{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}$. $\frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \frac{(R+R_0)^2}{(R+R_0)^2+L^2\omega^2}E_{eff}^2 \leq 1$. *Le maximum est atteint pour* $\frac{d\mathcal{P}'}{dR} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(R+R_0)^2+L^2\omega^2} - \frac{2R(R+R_0)}{\left((R+R_0)^2+L^2\omega^2\right)^2} = 0$ *soit* $(R+R_0)^2 + L^2\omega^2 - 2R(R+R_0) = R^2 + R_0^2 + 2RR_0 + L^2\omega^2 - 2R^2 - 2RR_0 = 0$. *On trouve donc* $R = \sqrt{L^2\omega^2 + R_0^2} = 33\Omega$

On considère un circuit composé d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R en série. Le condensateur et la bobine sont initialement déchargés. Le circuit est alimenté par un générateur de tension parfait qui délivre une force électromotrice $E(t)$.

1. Dans cette question, la tension $E(t)$ vaut $\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$. On se place à $t > 0$.

   (a) Exprimez l'équation différentielle vérifiée par la tension U_C aux bornes du condensateur.

   (b) Donnez la forme générale des solutions de l'équation homogène associée.

   (c) Proposez une solution particulière.

   (d) Tracez qualitativement, sur un même graphique, la forme de la tension U_C et de la tension E au cours du temps.

2. Dans cette question, la tension $E(t)$ vaut $\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E_0 \cos \omega t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$. On se place à $t > 0$.

   (a) Exprimez l'équation différentielle vérifiée par la tension U_C aux bornes du condensateur. Quelle difficulté supplémentaire apparait par rapport au cas précédent ?

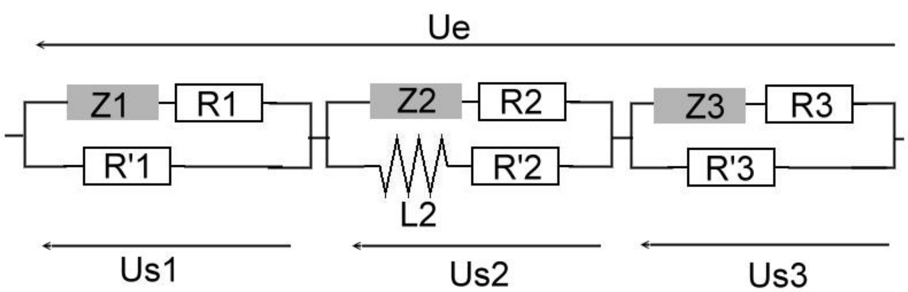
   (b) Justifiez l'approximation suivante : "si on se place à un temps suffisamment grand, on peut négliger les solutions de l'équation homogène associée".

   (c) On cherche une solution particulière sous la forme $U_C(t) = U_C^0 \cos(\omega t + \varphi_C)$. Justifiez cette forme et réécrivez l'équation différentielle vérifiée par U_C en introduisant la notation complexe.

   (d) Tracez qualitativement, sur un même graphique, la forme de la tension U_C et de la tension E.

   (e) Montrez que pour une certaine valeur de ω l'amplitude U_C^0 est maximale.

On considère le montage suivant, dans lequel trois blocs d'impédance Z_1, Z_2 et Z_3 sont inconnus. On note Z l'impédance totale.



On mesure, en faisant varier la fréquence du générateur de 0 à $+\infty$, le gain défini par $G_i = \frac{|u_i|}{|u_e|}$, $i \in [[1, 3]]$.
On trouve les résultats suivants :

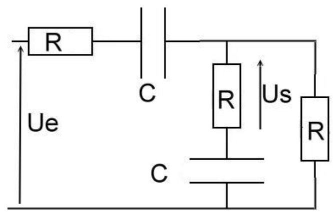
Pour $\omega \to 0$, $G_1 \to \frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} \frac{1}{\frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} + R_2' + R_3'}$, $G_2 \to \frac{R_2'}{\frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} + R_2' + R_3'}$, $G_3 \to \frac{R_3'}{\frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} + R_2' + R_3'}$.

Pour $\omega \to +\infty$, $G_1 \to \frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} \frac{1}{\frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} + R_2 + R_3'}$, $G_2 \to \frac{R_2}{\frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} + R_2 + R_3'}$, $G_3 \to \frac{R_3'}{\frac{R_1 R_1'}{R_1 + R_1'} + R_2 + R_3'}$.

Pour $\omega \to \omega_1$, $G_1 \to \frac{R_1'}{Z(\omega)}$.

Pour $\omega \to \omega_3$, $G_3 \to \frac{R_3 R_3'}{R_3 + R_3'} \frac{1}{Z(\omega)}$.

Proposez des blocs pouvant correspondre à ces résultats.



On cherche à étudier le montage ci dessus :

1. En considérant que la tension u_e est de la forme $u_e = U_0 cos\left(\omega t\right)$, exprimez la fonction de transfert $H\left(j\omega\right) = \frac{u_s}{u_e}$ du montage.
2. Tracez qualitativement le diagramme de Bode en amplitude du filtre.
3. Exprimez l'équation différentielle vérifiée par u_s.
4. Comment déterminer la réponse du filtre à une tension en dent de scie de fréquence T ?

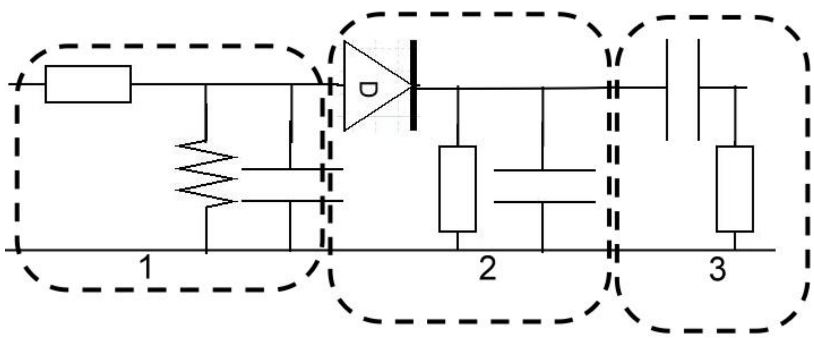
On s'intéresse au fonctionnement d'un récepteur radio en démodulation d'amplitude. On privilégiera dans cet exercice une approche qualitative.

Modulation

On veut transmettre par radio un message. Ce message correspond à une onde $v_m = V_m cos\left(\omega_m t\right)$, qu'on appelle *modulant*. Pour le transmettre, on commence par le moduler en amplitude en lui faisait subir le traitement $v_m \hookrightarrow v_m v_p + v_p$, où v_p est un signal porteur de la forme $v_p = V_p cos\left(\omega_p t\right)$ avec $\omega_p \gg \omega_m$.

1. Expliquez l'intéret de cette démarche de modulation.
2. Donnez une forme développée du signal modulé et tracez son allure. Quelles fréquences y apparaissent ?

Démodulation : fonctionnement d'un récepteur radio.



On s'intéresse maintenant à la réception de l'onde dans un poste radio. On considère qu'aux bornes du circuit 1 se trouve un signal constitué d'une superposition d'onde, dont le signal modulé. On note U_{ei} et U_{si} les tensions d'entrée et de sortie des différents blocs.

Bloc 1 choix de la fréquence.

- Exprimez la fonction $H_1\left(j\omega\right) = \frac{u_{s1}}{u_{e1}}$ sous la forme $\frac{G}{1+\frac{j}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$.
- Comment se comporte ce premier bloc si $Q \ll 1$? A quoi sert-il alors ?

Dans la suite de l'exercice, on considera $Q \ll 1$ et on prendra $\omega_0 = \omega_p$. Tracez l'allure du signal U_{s1}.

Bloc 2 détection des crêtes.

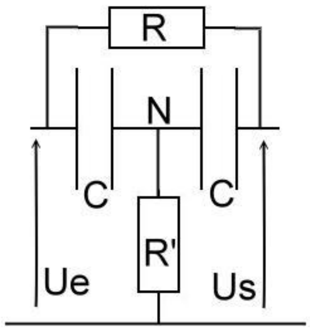
On considère initialement que $U_{e2} > U_{s2}$ et que la diode est passante. Elle est alors assimilée à une petite résistance r. Exprimez l'équation différentielle vérifiée par U_{s2} et en déduire l'évolution de U_{s2} tant que la diode est passante.

A quel moment la diode devient elle bloquante ? Comment évolue alors la tension U_{s2} ?

Comment doit on choisir $\tau = RC$ pour que le premier bloc serve effectivement de détecteur de crête ? Tracez dans ce cas l'allure du signal U_{s2}.

Bloc 3 élimination de la tension constante.

Exprimez la tension de sortie U_{s3} en fonction de U_{s2}. On considère que le temps caractéristique de ce troisième bloc est très petit devant celui du signal. Tracez l'allure du signal de sortie.



1. Exprimez V_N en fonction de U_s et de U_e.
2. Exprimez U_s en fonction de V_N et de U_e, puis exprimez la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$.
3. Dans le cas où $R = R'$, tracez $H_{dB}(x)$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Adaptation d'impédance
Puissance dissipée maximale avec Z et Z' si Z'=Z*
Donc Rg = Z* avec Z* l'impédance du bloc entier (condo + bobine + resistance)

$E(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_0 \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} \cos\left((2n+1)\frac{2\pi}{T} t\right)$