Quelques résultats sur les dipoles statiques

1 Dipoles électrostatiques

Définition

On peut représenter un dipole par deux charges $\pm q$ opposées distantes d'une distance a. Si la charge négatif est en N et la charge positive en P, on a

$$\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{NP}$$

Par la suite, on notera O le point situé au centre du dipole.

Le plus simple pour calculer le champ crée un dipole est de commencer par déterminer le potentiel crée par ce dipole.

Potentiel crée loin d'un dipole

On se place en un point M à une distance $OM = r \gg a$ du dipole. Par le théorème de superposition (dû à la linéarité des équations de Maxwell), le potentiel crée par le dipole est la somme de celui crée par N et par P

$$V(M) = V_N(M) + V_P(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{NM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{PM}$$

Or

$$\frac{1}{NM} = \frac{1}{\sqrt{(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM}).(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM})}} = \frac{1}{OM\sqrt{(\frac{NO}{OM})^2+2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{NO}+1}} \simeq \frac{1}{OM}\left(1-\frac{\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OM}}{OM^2}\right)$$

par développement limité au premier ordre en $\frac{a}{r}$ ($\left|\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OM}\right| \leq a\,r$). On a donc

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{PM}-\frac{1}{NM}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM^3}\left(\overrightarrow{NP}.\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\overrightarrow{p}.\overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Champ électrique loin d'un dipole

On détermine ensuite simplement le champ en coordonnées sphériques par $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$, avec $\overrightarrow{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\begin{pmatrix} 2\cos\theta/r^3 \\ \sin\theta/r^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les lignes de champ

On cherche à décrire une courbe $\overrightarrow{r}(s)$ paramétrée par son abscisse curviligne s telle qu'en tout point, le champ $\overrightarrow{E}$ soit tangent à la courbe. Cette condition se traduit par $\overrightarrow{dr} \parallel \overrightarrow{E}$, ie $\overrightarrow{dr}\wedge\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$. Avec $\overrightarrow{dr} = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ r\,\sin\theta d\varphi \end{pmatrix}$, cette condition donne $E_\theta dr = E_r rd\theta$ ce qui implique

$$\frac{dr}{r} = 2\frac{cos\theta d\theta}{sin\theta} = 2\frac{d(sin\theta)}{sin\theta}$$

$$\Rightarrow r = r_0 sin^2\theta$$

Cette équation détermine entièrement les lignes de champ.

Action exercée sur un dipole par un champ extérieur

Attention : ici, le champ $\overrightarrow{E}$ et le potentiel V ne sont pas les champs crées par le dipoles mais des champs imposés par l'extérieur.

- L'énergie potentielle est donnée par

$$E_p = -qV(N) + qV(P) = q\left(-V\left(O+\overrightarrow{ON}\right) + V\left(O+\overrightarrow{OP}\right)\right)$$

$$= q\left(-\left(V(O) + \left(\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{grad}\right)V(O)\right) + \left(V(O) + \left(\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{grad}\right)V(O)\right)\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad}\right)V(O) = -\overrightarrow{p}.\overrightarrow{E}(O)$$

- En utilisant simplement la force de Lorentz $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$, on obtient

$$\overrightarrow{F} = -q\overrightarrow{E(N)} + q\overrightarrow{E(P)} = q\left(\overrightarrow{E}(O+\overrightarrow{OP}) - \overrightarrow{E}(O+\overrightarrow{ON})\right)$$

$$\simeq q\left(\overrightarrow{E}(O) + \left(\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{E}(O) - \overrightarrow{E}(O) - \left(\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{E}(O)\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{E}(O)$$

- De la même manière pour calculer le moment par rapport au point O central,

$$\overrightarrow{\Gamma_O} = \overrightarrow{ON} \wedge \left(-q\overrightarrow{E(N)}\right) + \overrightarrow{OM} \wedge \left(q\overrightarrow{E(M)}\right) = q\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{E(M)} + \overrightarrow{E(N)}\right) \simeq 2q\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{E(O)}$$

$$= \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}(O)$$

2 Dipoles magnétostatiques

Définition

On peut représenter un dipole magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ par une spire arbitrairement petite, de surface orientée $\overrightarrow{S}$ et parcourue par une intensité I telle que

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\overrightarrow{S}$$

Un aimant est un dipole magnétique.

Résultats

On peut transposer directement tous les résultats précédents aux dipoles magnétiques avec les substitutions suivantes :

$$\overrightarrow{p} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{M}} \qquad \overrightarrow{E} \rightarrow \overrightarrow{B} \qquad \frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$$

On obtient ainsi

$$\overrightarrow{B_{\overrightarrow{\mathcal{M}}}} = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi}\begin{pmatrix} 2cos\theta/r^3 \\ sin\theta/r^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{B_{ext}} \qquad \overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{B_{ext}} \qquad \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B_{ext}}$$

Calculs supplémentaires :

- Champ magnétique sur l'axe d'une spire

$$\overrightarrow{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} sin^3\alpha$$

- Flux magnétique d'un aimant au travers d'une spire
  On considère une spire de rayon a placée à une distance D d'une aimant de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$. Le centre de l'aimant est placé sur l'axe $\overrightarrow{u_z}$ de la spire mais la direction de $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ n'est pas nécessairent aligné avec $\overrightarrow{u_z}$: on notera θ l'angle entre $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et $\overrightarrow{u_z}$. On assimile l'aimant à une spire de surface S_M parcourue par une intensité i_M telle que $\overrightarrow{\mathcal{M}} = i_M \overrightarrow{S_M}$.
  D'après la définition de l'inductance mutuelle,

$$\phi_{M \to S} = M i_M$$

  et on va chercher à calculer l'inductance mutuelle M.
  Imaginons pour cela que la spire soit parcourue par un courant i_S. Dans ce cas, par définition de l'inductance mutuelle, on aurait un flux magnétique crée par la spire au travers de l'aimant (assimilé à une petite spire)

$$\phi_{S \to M} = M i_S \ .$$

  Or le champ créé sur l'axe de la spire vaut alors $\overrightarrow{B_S}(z) = \frac{\mu_0 i_S}{2a} sin^3\alpha \overrightarrow{u_z}$. On a donc $\phi_{S \to M} \simeq \overrightarrow{S_M}.\overrightarrow{B_S}(z) = \frac{\mu_0 i_S}{2a} sin^3\alpha S_M cos\theta$ donc

$$M = \frac{\mu_0}{2a} sin^3\alpha S_M cos\theta$$

  et on en déduit

$$\phi_{M \to S} = \frac{\mu_0}{2a} sin^3\alpha S_M i_M cos\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a} sin^3\alpha cos\theta.$$