Effet Doppler

1 Effet Doppler classique

Il faut distinguer deux types d'effets Doppler classique, car il existe un référentiel privilégié dans lequel la vitesse du signal est isotrope et est notée c. C'est par exemple le référentiel dans lequel le milieu porteur d'une onde mécanique (comme l'air pour le son) est au repos.

Dans le premier cas, le récepteur est immobile dans ce référentiel et la source en mouvement ; dans le second cas, c'est le récepteur qui bouge et la source qui reste immobile.

On peut comprendre qualitativement la différence entre les deux cas. Quelle que soit la vitesse de la source, lorsqu'elle envoie un signal dans le milieu porteur, ce signal se propage à la vitesse c et sera finalement capté par le détecteur. En revanche, si c'est le détecteur qui se déplace, il peut bouger tellement vite que le signal envoyé par la source ne parviendra pas à le rattrapper.

1.1 Effet dû au mouvement de la source

Première analyse simple :

Considérons un observateur fixe placé à l'origine du repère et une source émettant un signal périodique de période T_0^S. On suppose que la source se déplace avec une vitesse constante v_0 suivant l'axe x.

- La source émet un *bip* à l'instant t_0.
  Au moment de l'émission, la source est à une distance d_0 du détecteur. Le signal est donc capté en $t'_0 = t_0 + d_0/c$
- La source émet un second *bip* à l'instant $t_1 = t_0 + T_0^S$.
  Au moment de cette seconde émission, la source est à une distance d_1 du détecteur. Le signal est donc capté en $t'_1 = t_1 + d_1/c$.

La période mesurée par le détecteur est alors donnée par $T_0^C = t'_1 - t'_0 = T_0^S + \frac{d_1-d_0}{c}$.

En notant θ l'angle entre $\overrightarrow{CS}\,(t_0)$ et $\overrightarrow{u_x}$ à l'instant t_0, on trouve les expressions suivantes :

$$d_0 = ||\overrightarrow{CS}\,(t_0)\,||$$

$$d_1 = ||\overrightarrow{CS}\,(t_1)\,|| = ||\overrightarrow{CS}\,(t_0) + v_0 T_0^S \overrightarrow{u_x}|| = \sqrt{d_0^2 + \left(v_0 T_0^S\right)^2 + 2 v_0 T_0^S \overrightarrow{CS}\,(t_0)\,.\overrightarrow{u_x}} \simeq d_0 + v_0 T_0^S cos\theta$$

On en déduit donc la relation

$$T_0^C = T_0^S\left(1 + \frac{v_0}{c} cos\theta\right)$$

Seconde analyse : effet Doppler instantanné

On considère que la source émet un signal $s_e(t) = S_0 cos\left(2\pi\nu_e t\right)$ qui se propage dans toutes les directions à la vitesse c dans le référentiel du capteur.

Le capteur mesure un signal $s_c(t) = S_0 cos(\varphi(t))$, en négligeant la diminution d'amplitude de l'onde.

Le signal mesuré à l'instant t a été émis par la source à l'instant t' tel que $t = t' + \frac{CM(t')}{c}$. En considérant $CM(t') = CM(t) + \frac{dCM}{dt}\big\rfloor_{t'}(t'-t) = CM(t) + vcos\theta(t'-t)$, on obtient l'expression

$$t' = t - \frac{CM(t)}{c + vcos\theta}$$

On a donc $s_C(t) = S_0 cos\left(2\pi\nu_e\left(t - \frac{CM}{c+vcos\theta}\right)\right)$, soit

$$\varphi(t) = 2\pi\nu_e\left(t - \frac{CM}{c+vcos\theta}\right)$$

La fréquence instantannée du signal est donnée au premier ordre par $\nu(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt} = \nu_e\left(1 - \frac{1}{c+vcos\theta}\frac{dCM}{dt}\right) = \nu_e\left(1 - \frac{vcos\theta}{c+vcos\theta}\right)$.

En en déduit l'expressions de l'effet Doppler :

$$\nu^C = \frac{\nu^S}{1+\frac{v}{c}cos\theta} \Leftrightarrow T^C = \left(1 + \frac{v}{c}cos\theta\right)T^S$$

1.2 Effet dû au mouvement du détecteur

Première analyse simple :

Considérons une source S fixe placée à l'origine du repère émettant un signal périodique de période T_0^S et un observateur C qui se déplace avec une vitesse constante v_0 suivant l'axe x. On note d_0 la distance initiale entre la source et le détecteur.

- La source émet un *bip* à l'instant t_0.
  Le signal est donc capté en t'_0 tel que $(t'_0 - t_0)\,c = SC(t'_0) \Rightarrow t'_0 = t_0 + \frac{SC(t'_0)}{c}$
- La source émet un second *bip* à l'instant $t_1 = t_0 + T_0^S$.
  Le signal est donc capté en t'_1 tel que $(t'_1 - t_1)\,c = SC(t'_1) \Rightarrow t'_1 = t_1 + \frac{SC(t'_1)}{c}$.

La période mesurée par le détecteur est alors donnée par $T_0^C = t'_1 - t'_0 = T_0^S + \frac{SC(t'_1)-SC(t'_0)}{c}$.

En utilisant le développement au premier ordre, $SC(t'_0) = SC(t_0) + \frac{dSC}{dt}\Big\rfloor_{t_0}(t'_0 - t_0)$ et $SC(t'_1) = SC(t_0) + \frac{dSC}{dt}\Big\rfloor_{t_0}(t'_1 - t_0)$. On a alors

$$T_0^C = t'_1 - t'_0 = T_0^S + \frac{SC(t'_1)-SC(t'_0)}{c}$$

$$= T_0^S + \frac{\left[SC(t_0)+\left(t'_1-t_0\right)vcos\theta\right]-\left[SC(t_0)+\left(t'_0-t_0\right)vcos\theta\right]}{c}$$

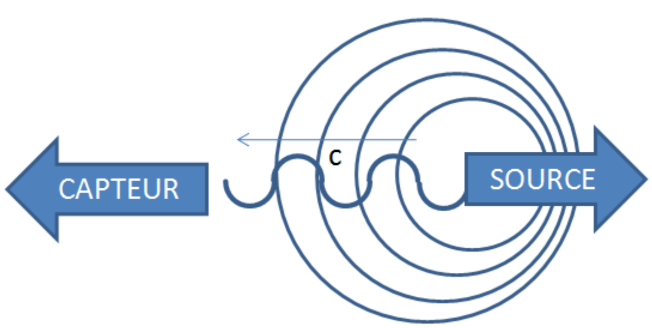
$$= T_0^S + \frac{vcos\theta}{c}\left(t'_1 - t'_0\right) = T_0^S + \frac{vcos\theta}{c}, \text{ d'où}$$

$$T_0^C = \frac{T_0^S}{1-\frac{v_0 cos\theta}{c}}$$

1.3 Lien entre les deux descriptions

Le principe de relativité impose l'invariance des lois par changement de référentiel. On doit donc pouvoir trouver une formulation de l'effet Doppler indépendante du référentiel.

Pour cela, plaçons nous dans le référentiel dans lequel le milieu de propagation du signal est au repos, ie dans lequel le signal se propage de manière isotrope à la célérité c. On note v_S la vitesse d'éloignement de la source et v_C celle du capteur, toutes deux mesurées dans ce référentiel.



Les analyses précédentes permettent alors de trouver l'expression de la période mesurée par le capteur T_0^C en fonction de celle envoyée par la source T_0^S, de leurs vitesses respectives dans le référentiel d'étude R et de la célérité du signal dans le même référentiel :

$$\boxed{T_0^C = \frac{1+\frac{v_S}{c}}{1-\frac{v_C}{c}} T_0^S}$$

Dans le référentiel du capteur

On change de réfentiel $R \to R^C$ où R^S est en translation rectiligne uniforme à la vitesse v_C dans R. La loi de composition classique des vitesses donne

$$v_C \to v_C^C = v_C - v_C = 0$$

$$v_S \to v_S^C = v_S + v_C$$

$$c \to c^C = c - v_C$$

Dans ce référentiel, le capteur est immobile et la source en mouvement. On doit donc retrouver la formule du paragraphe 1.1.

Et en effet, on trouve bien $\frac{1+\frac{v_S}{c}}{1-\frac{v_C}{c}} = \frac{c+v_s}{c-v_C} = \frac{c-v_c+v_c+v_s}{c-v_C+v_C-v_C} = \frac{(c-v_C)+(v_S+v_C)}{(c-v_C)-(v_C-v_C)} = \frac{c^C+v_S^C}{c^C-v_C^C} = 1 + \frac{v_S^C}{c^C}$, comme obtenu dans le paragraphe 1.1.

Dans le référentiel de la source

En effectuant le changement de référentiel $R \to R^S$, où R^S est en translation rectiligne uniforme à la vitesse v_S dans R, on retrouve bien évidemment l'expression du paragraphe 1.2.

Limite $v \ll c$

Il est à noter que si la vitesse d'éloignement de la source par rapport au capteur est négligeable devant la célérité du signal, les deux situations précédentes donnent le même résultat au premier ordre en $\frac{v}{c}$:

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-1} \underset{DL_1}{=} 1 + \frac{v}{c}$$

2 Effet Doppler en relativité restreinte

On considère un rayon lumineux de quadrivecteur d'onde $\underline{K_R} = \begin{bmatrix} \omega_R \\ \overrightarrow{k_R} \end{bmatrix}$ dans son référentiel R d'émission. Le faisceau est observé dans un référentiel R' en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ par rapport au référentiel R. En application la transformation de Lorentz correspondante au quadrivecteur d'onde K, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\omega_{R'}}{c} = \gamma\left(\frac{\omega_R}{c} - \beta k_{R,\parallel}\right) \\ k_{R',\parallel} = \gamma\left(k_{R,\parallel} - \beta\frac{\omega_R}{c}\right) \\ \overrightarrow{k_{R',\perp}} = \overrightarrow{k_{R,\perp}} \end{cases} ,$$

avec $\beta = \frac{v_0}{c}$ et $\gamma = \left(1+\beta^2\right)^{-1/2}$.

2.1 Effet Doppler longitudinale

Si la source se déplace dans la même direction que le faisceau lumineux se propage (ie $k_{R,\parallel} v_0 = \overrightarrow{k_R}.\overrightarrow{v_0} = k_R v_0$), alors la transformation donne $\omega_{R'} = \gamma\left(\omega_R - \beta c k_R\right)$. Comme la normalisation du quadrivecteur $\underline{K_R}.\underline{K_R} = 0$ donne $\omega_R^2 = k_R^2 c^2$, on obtient, avec $T_0^C = \frac{2\pi}{\omega_{R'}}$ et $T_0^C = \frac{2\pi}{\omega_R}$

$$\omega_{R'} = \gamma\left(\omega_R - \beta\omega_R\right)$$

$$\Leftrightarrow T_0^C = \frac{T_0^S}{\gamma(1-\beta)}$$

$$\Leftrightarrow T_0^C = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} T_0^S$$

Approximation classique

Par développement limité au premier ordre, avec $\beta \ll 1$, on trouve les résultats précédents :

$$\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \underset{DL_1}{=} \left((1+\beta)(1-\beta)\right)^{1/2} \underset{DL_1}{=} (1+2\beta)^{1/2} = 1 + \frac{v}{c}$$

2.2 Effet Doppler transverse

Si la source se déplace perpendiculairement au faisceau lumineux (ie $k_{R,\parallel} v_0 = \overrightarrow{k_R}.\overrightarrow{v_0} = 0$), alors la transformation donne $\omega_{R'} = \gamma \omega_R$. On obtient, avec $T_0^C = \frac{2\pi}{\omega_{R'}}$ et $T_0^C = \frac{2\pi}{\omega_R}$

$$\omega_{R'} = \gamma \omega_R$$

$$\Leftrightarrow T_0^C = \frac{T_0^S}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow T_0^C = \sqrt{1-\beta^2} T_0^S$$

Cette manifestation de l'effet Doppler n'a pas d'équivalent non relativiste.

3 Effet Doppler en relativité générale

A venir !