Electrostatique.

Plan d'étude d'un problème d'électrostatique.

On cherche à déterminer la valeur $\overrightarrow{E}(M)$ du champ $\overrightarrow{E}$ en un point M. On part d'un problème à plein d'inconnues :

$$\overrightarrow{E(M)} = E_x(x_M,\, y_M,\, z_M)\overrightarrow{u_x} + E_y(x_M,\, y_M,\, z_M)\overrightarrow{u_y} + E_z(x_M,\, y_M,\, z_M)\overrightarrow{u_z}.$$

1. Le premier but de l'étude est de réduire le plus possible le nombre d'inconnues.
2. On utilise les invariances pour réduire la dépédance du champ aux variables d'espace.
   $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(r, \theta, \varphi) \rightsquigarrow \overrightarrow{E(r)}$ par exemple.
3. On utilise les symétries pour réduire les directions possibles du champ.
   $\overrightarrow{E}(M) = E_r(M)\overrightarrow{u_r} + E_\theta(M)\overrightarrow{u_\theta} + E_\varphi(M)\overrightarrow{u_\varphi} \rightsquigarrow E_r(M)\overrightarrow{u_r}$ par exemple.
4. On se sert enfin des théorèmes pour trouver l'expression du champ.

Invariances.

Tout repose sur une règle très puissante:

Si une transformation (translation, rotation...) laisse distribution de charge est invariante, alors elle laisse le champ invariant.

Exemples

- *On considère un plan d'équation $z = 0$ uniformément chargé. Si on translate ce plan dans la direction x ou y, il reste inchangé. Pour s'en convaincre, on peut remarquer qu'on "voit" exactement la même configuration depuis tout point (x, y) à z donné. Le champ ne dépend donc que de z.*
  On est donc passé de $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(x, y, z)$ à $\overrightarrow{E}(z)$.

- *On considère une sphère uniformément chargée. Si on tourne la boule d'un angle θ ou φquelconque, elle reste inchangée. Pour s'en convaincre, on peut remarquer qu'on "voit" exactement la même configuration après avoir tourné autour de la sphère en restant à distance constante. Le champ ne dépend donc que de r.*
  On est donc passé de $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(r, \theta, \varphi)$ à $\overrightarrow{E}(r)$.

Symétries.

On a ici trois résultats importants. En pratique, on se sert le plus souvent de la deuxième et de la troisième règle.

1. Le champ $\overrightarrow{E}$ étant un vrai vecteur, il est symétrique par rapport aux plans de symétries de la distribution des charges et antisymétrique par rapport aux plans d'antisymétrie de la distribution de charge.
   Autrement dit, si Π est un plan de symétrie des charges et que M' est le symétrique de M par rapport à Π, alors $\overrightarrow{E}(M')$ est le symétrique de $\overrightarrow{E}(M)$ par rapport à Π. A noter qu'on parle ici de deux points M et M' distincts, qui n'appartiennent pas au plan Π.
   De la même manière, si Π est un plan d'antisymétrie des charges et que M' est le symétrique de M par rapport à Π, alors $\overrightarrow{E}(M')$ est l'antisymétrique de $\overrightarrow{E}(M)$ par rapport à Π, c'est à dire $-sym_\Pi \overrightarrow{E}(M)$.
2. Soit Π un plan passant par M et plan de symétrie de la distribution des charges. Alors le champ $\overrightarrow{E}$ calculé au point M est dans le planΠ.

3. Soit Π un plan passant par M et plan d'antisymétrie de la distribution des charges. Alors le champ $\overrightarrow{E}$ calculé au point M est orthogonal au planΠ.

Théorèmes généraux.

Théorème de Gauss:

$$\boxed{\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

Ce théorème peut également être appliqué pour calculer le champ gravitationnel.

Il permet de calculer la valeur du champ électrique en un point M donné.

Pour l'utiliser, on choisit une surface fictive passant par M sur laquelle on va savoir intégrer la valeur du champ. Deux cas se présentent en général:

1. La composante normale du champ est constante sur une partie Σ de la surface. Dans ce cas, l'intégrale donne sur Σ $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\, S$ où S est la surface de Σ.
   Exemple typique: le champ crée par une charge ponctuelle.
2. Le champ est orthogonal à la surface sur une partie Σ. Dans ce cas, l'intégrale donne 0 sur Σ.
   Exemple typique: le champ crée par un plan.

Circulation du champ électrique:

$$\boxed{\oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0}$$

Rarement utilisé, mais à savoir au cas où.

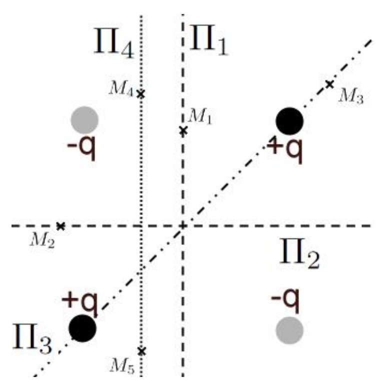
Loi de Coulomb:

$$\boxed{\overrightarrow{E(M)} = \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho d\tau}{PM^3}\overrightarrow{PM}}$$

ce qui peut s'écrire sous forme infinitésimale : $\overrightarrow{dE(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho d\tau}{PM^3}\overrightarrow{PM}$, où $\overrightarrow{dE(M)}$ est la contribution au champ $\overrightarrow{E}$ total mesuré en M du petit volume $d\tau$ autour du point P.

Exemple:

Symétries:



- *Le point M_1 appartient au plan $\Pi_1 = (M_1, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, plan d'antisymétrie des charges. On en déduit que le champ en M_1 est orthogonal au plan Π_1.*
  ▷ *On est donc passé de à $\overrightarrow{E}(M_1) = E_x(M_1)\overrightarrow{u_x}$.*

- *Le point M_2 appartient au plan $\Pi_2 = (M_2, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$, plan d'antisymétrie des charges. On en déduit que le champ en M_2 est orthogonal au plan Π_2.*
  ▷ *On est donc passé à $\overrightarrow{E}(M_2) = E_y(M_2)\overrightarrow{u_y}$.*

- *Le point M_3 appartient à deux plans de symétries: $\Pi_0 = (M_3, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ (plan de la feuille) et $\Pi_3 = (M_3, \overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On en déduit que le champ en M_3 est contenu dans chacun de ces deux plans, c'est à dire dans le droite passant par M_3 et de vecteur directeur $\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y})$ (le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ permet de normaliser le vecteur).*
  - ▷ *On est donc passé à $\overrightarrow{E}(M_3) = E(M_3)\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y})$.*
- *Le point M_4 apparitent au plan Π_0, plan de symétrie des charges. On sait donc que le champ en M_4 sera contenu dans le plan de la feuille (rien suivant z). En revanche, le plan Π_4 n'est plan ni d'antisymétrie, ni de symétrie. On ne peut donc pas avoir plus d'informations sur la direction du champ en M_4.*
  - ▷ *On est donc passé à $\overrightarrow{E}(M_4) = E_x(M_4)\overrightarrow{u_x} + E_y(M_4)\overrightarrow{u_y}$.*
- *De la même manière, pour le point M_5, on sait seulement que le champ est contenu dans le plan Π_0. Cependant, comme le point M_5 est le symétrique du point M_4 par la plan Π_2 qui est plan d'antisymétrie des charges, on sait que $\overrightarrow{E}(M_5)$ est l'antisymétrique de $\overrightarrow{E}(M_4)$ par rapport à Π_2.*

Champ crée par une charge:

On considère une charge q placée à l'origine, en O. On veut calculer le champ crée en un point M.

1. Invariances.
   La distribution de charge est invariante par rotation d'angle θ et par rotation d'angle φ. Le champ ne dépend donc que de $r = ||\overrightarrow{OM}||$: il est de la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{u}$.
2. Symétries.
   Tout plan contenant la droite OM est plan de symétrie de la distribution de charge. Le champ en M est donc contenu dans tous les plans contenant la droite OM, c'est à dire dans leur intersection, c'est à dire dans la droite OM. Le champ est donc de la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(M)\overrightarrow{u_r}$
3. Utilisation du théorème de Gauss.

   Choix de la surface:

   Comme le champ est de la forme $E(r)\overrightarrow{u_r}$, on va utiliser une sphère centrée sur O et de rayon r. En effet, cette sphère vérifie toutes les conditions posées plus haut :
   (a) Elle passe par le point M.
   (b) Il est facile de calculer l'intégrale de $\overrightarrow{E}$ dessus: on va trouver, $\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = E(r) \times surface$, car la composante normale de $\overrightarrow{E}$ est constante sur la surface (cette composante est la norome du champ $\overrightarrow{E}$ lui même, qui est constante sur une surface située à $r = cste$.

   Calcul de l'intégrale de $\overrightarrow{E}$ sur la surface:

   $$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint E(r)\overrightarrow{u_r}.dS\overrightarrow{u_r} = \oiint E(r)\, r^2 sin\theta d\theta d\varphi = r^2 E(r) \int sin\theta d\theta \int d\varphi = r^2 E(r)\, 2 \times 2\pi$$

   Calcul de la charge à l'intérieur de la surface

   La charge q est à l'intérieur de la sphère et c'est la seule. On a donc $Q_{int} = q$.

   Application du théorème de Gauss

   D'après le théorème de Gauss, $4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$. On a donc finalement:

   $$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$$

Champ crée par un plan chargé:

On considère un plan Π_0 d'équation $z = 0$ uniformément doté d'une charge surfacique σ . On veut calculer le champ crée en un point M.

1. Invariances.
   La distribution de charge est invariante par translation suivant les directions $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. Le champ ne dépend donc que de z: il est de la forme $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\overrightarrow{u}$.

2. Symétries.

   Tout plan orthogonal à Π_0 et passant par M est plan de symétrie de la distribution de charge. Le champ est M est donc contenu dans chacun de ces plans, c'est à dire dans leur intersection, c'est à dire dans la droite $\overrightarrow{u_z}$.

3. Utilisation du théorème de Gauss.

   Choix de la surface:

   Comme le champ est de la forme $E(z)\overrightarrow{u_z}$, on va utiliser un pavé dont la face supérieure contient M. On choisit arbitrairement la surface de cette face supérieure: on peut par exemple considérer un pavé de section carrée de côté a. On doit également choisir la hauteur du pavé. Comme le plan $z = 0$ est plan de symétrie, on sait que les points situés en $z = -z_M$ auront un champ symétrique à celui de M. On prend donc un pavé de section carré de côté a et de hauteur $h = 2z_M$, qui va de z_M à $-z_M$. Cette surface vérifie les conditions nécessaires:

   (a) Elle passe par le point M.

   (b) Il est facile de calculer l'intégrale de $\overrightarrow{E}$ dessus. Elle se décompose en 3 parties:

   - Sur la face supérieure, $\iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \iint E(z)\overrightarrow{u_z}.dxdy\overrightarrow{u_z} = \iint E(z)dxdy = E(z_M)a^2$.
   - Sur la face inférieure, $\iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \iint E(z)\overrightarrow{u_z}.dxdy\,(-\overrightarrow{u_z}) = -\iint E(z)dxdy = +\iint E(z)dxdy = E(z_M)a^2$.
   - Sur les 4 faces latérales, $\iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = 0$ car le vecteur normal est porté par $\overrightarrow{u_x}$ ou $\overrightarrow{u_y}$, orthogonaux à $\overrightarrow{u_z}$.

   Calcul de l'intégrale de $\overrightarrow{E}$ sur la surface:

   $$\oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{haut} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{bas} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} + \iint_{coté} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = 2E(z_M)a^2$$

   Calcul de la charge à l'intérieur de la surface

   Le pavé contient un morceau du plan de surface a^2. On a donc $Q_{int} = \sigma a^2$.

   Application du théorème de Gauss

   D'après le théorème de Gauss, $2E(z)a^2 = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}$. On a donc finalement:

   $$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma\overrightarrow{u_z}}$$