Vaut il mieux courir ou marcher sous la pluie ?

July 10, 2012

On assimile le cobaye à un pavé de dimensions $L \times l \times h$. Il se déplace avec une vitesse $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ constante et doit parcourir une distance d.

La pluie tombe avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} v_0 sin\theta \\ -v_0 cos\theta \end{pmatrix}$ par rapport au sol, en prenant $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ entre la direction de la pluie et la verticale ; on note n le nombre de gouttes par unité de volume.

Dans le réferentiel du cobaye, la pluie presente une vitesse $\overrightarrow{v_0^R} = \overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_0 sin\theta - v \\ -v_0 cos\theta \end{pmatrix}$ et la densite reste constante, dans l'approximation d'une pluie non relativisite. Le flux frappant le cobaye peut alors s'écrire

$$\phi = \phi_x + \phi_y = nv_{0,x}^R S_x + nv_{0,y}^R S_y = |v_0 sin\theta - v|\, Lhn + v_0 cos\theta Lln$$

La quantite d'eau reçue par le cobaye lors de son trajet s'exprime sous la forme $N = \phi T = \phi d/v$, où T est le temps de parcours. On a donc

$$\begin{aligned} N &= \left|\tfrac{v_0}{v} sin\theta - 1\right| Lhnd + \tfrac{v_0}{v} cos\theta Llnd \\ &= \left(\left|\tfrac{v_0}{v} sin\theta - 1\right| h + \tfrac{v_0}{v} cos\theta l\right) Lnd. \end{aligned}$$

On cherche à minimiser la quantite d'eau reçue.

METHODE 1

1er cas $v < v_0 sin\theta$: la pluie vient de dos

Alors $N = \left(-h + \frac{v_0}{v} sin\theta h + \frac{v_0}{v} cos\theta l\right) Lnd = \left(-h + cos\theta\left(1 + tan\theta \frac{h}{l}\right) \frac{v_0}{v} l\right) Lnd$ et $tan\theta > 0$ car $sin\theta > 0$ puisque $v_0 sin\theta > v > 0$.

La fonction est donc strictement décroissante avec v dans l'intervalle $[0, v_0 sin\theta]$: il vaut mieux courir au moins à la vitesse $v_0 sin\theta$.

2eme cas $v > v_0 sin\theta$: la pluie vient de face

Alors $N = \left(h - \frac{v_0}{v} sin\theta h + \frac{v_0}{v} cos\theta l\right) Lnd = \left(h + cos\theta\left(1 - tan\theta \frac{h}{l}\right) \frac{v_0}{v} l\right) Lnd$. On voit ici deux possibilités :

- Si $tan\theta < \frac{l}{h}$, alors la fonction est strictement décroissante avec v dans l'intervalle $[v_0 sin\theta, +\infty]$: il vaut mieux courir le plus vite possible.
- Si $tan\theta > \frac{1}{h}$, alors la fonction est strictement croissante avec v dans l'intervalle $[v_0 sin\theta, +\infty]$: il vaut mieux courir au plus a la vitesse $v_0 sin\theta$.
- Si $tan\theta = \frac{1}{h}$, alors la fonction est independante de v dans l'intervalle $[v_0 sin\theta, +\infty]$: peut importe la vitesse tant qu'elle est supérieure a $v_0 sin\theta$.

METHODE 2

$N = \left(\sqrt{\left(1 - \frac{v_0}{v} sin\theta\right)^2} h + \frac{v_0}{v} cos\theta l\right) Lnd$ est une fonction de v C^0 et C^1 par morceaux. On peut donc étudier sa variation sur les deux domaines de definition de sa derivée $[0, v_0 sin\theta[$ et $]v_0 sin\theta, +\infty]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial v} &= \left(sign\left(1 - \tfrac{v_0}{v} sin\theta\right) \times \tfrac{v_0}{v^2} sin\theta h - \tfrac{v_0}{v^2} cos\theta l\right) Lnd \\ &= \left(sign\left(v - v_0 sin\theta\right) tan\theta \tfrac{h}{l} - 1\right) \tfrac{v_0}{v^2} Llnd\, cos\theta \end{aligned}$$

Pour $v < v_0 sin\theta$

$\frac{\partial N}{\partial v} < 0$, et on retrouve l'analyse précedente.

Pour $v > v_0 sin\theta$

$\frac{\partial N}{\partial v} < 0$ si $tan\theta < \frac{l}{h}$ et $\frac{\partial N}{\partial v} > 0$ si $tan\theta > \frac{l}{h}$, et on retrouve l'analyse précedente.

CONCLUSION Si la pluie présente un angle faible ($tan\theta < \frac{l}{h}$), mieux courir le plus vite possible. Si l'angle est plus grand, il vaut mieux marcher à la meme vitesse que le vent ($v = v_0 sin\theta$). Pour un cobaye humain ($l \simeq 1m$, $h \simeq 1m70$), cet angle correspond à °