Faire un bilan

1 Méthode générale

Dire clairement les choses

Pour écrire un bilan sans escorquerie, il faut être précis et annoncer clairement

- On fait un bilan de particules / charges électrique / quantité de mouvement / énergie / patates / etc.
- On fait un bilan entre l'instant t et l'instant $t + dt$
- On fait un bilan sur tel système (le volume entre x et $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$ / la tranche de section S et d'épaisseur entre x et $x + dx$ / un système Σ défini précédemment / etc.)

Détailler les ingrédients

Pour ne pas se prendre les pieds dans le tapis, le plus efficace est souvent de détailler chaque ingrédient du bilan (les exemples sont donnés par une tranche de section S et d'épaisseur entre x et $x+dx$ dans un problème à $1D$)

1. Quantité présente dans le système à l'instant t. En général, $n(x, t)dV = n(x, t)Sdx$.
2. Quantité entrant dans le système entre t et $t + dt$. En général, $d\phi_x = j_x(x, t)Sdt$. Voir plus bas.
3. Quantité sortant du système entre t et $t + dt$. Idem. En général, $d\phi_{x+dx} = j_x(x + dx, t)Sdt$. Idem
4. Quantité créée dans le système entre t et $t + dt$. En général, $dC = \mathcal{C}(x, t)Sdxdt$
5. Quantité détruite dans le système entre t et $t + dt$. En général, $dP = \mathcal{P}(x, t)Sdxdt$
6. Quantité présente dans le système à l'instant $t + dt$. En général, $n(x, t + dt)Sdx$.

Exprimer la conservation

La conservation de la quantité s'exprime alors simplement :

$$\begin{aligned}
\text{Ce qui est dans le système à l'instant } t+dt &= \text{Ce qui est dans le système à l'instant } t \\
&+ \text{Ce qui est entré} \\
&- \text{Ce qui est sorti} \\
&+ \text{Ce qui est crée} \\
&- \text{Ce qui est détruit}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n(x, t + dt)Sdx &= n(x, t)Sdx \\
&+ j_x(x, t)Sdt \\
&- j_x(x + dx, t)Sdt \\
&+ \mathcal{C}(x, t)Sdxdt \\
&- \mathcal{P}(x, t)Sdxdt
\end{aligned}$$

Utiliser la formule de Taylor-Young

On peut exprmier les quantités en $x + dx$ ou $t + dt$ en fonction de celles en x ou en t grâce à la formule de Taylor-Young

$$f(x_0+dx,y_0,z_0,t_0) \simeq f(x_0,y_0,z_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0,t_0)dx.$$

Le bilan précédent devient alors

$$\begin{aligned}
\left(n(x,t) + \frac{\partial n}{\partial t}(x,t)dt\right) Sdx &= n(x,t)Sdx \\
&+ j_x(x,t)Sdt \\
&- \left(j_x(x,t) + \frac{\partial j_x}{\partial x}(x,t)dx\right) Sdt \\
&+ \mathcal{C}(x,t)Sdxdt \\
&- \mathcal{P}(x,t)Sdxdt
\end{aligned}$$

REMARQUE : il peut arriver (par exemple dans une chaine de ressorts) que le bilan présente un terme de la forme $n(x+2dx)+n(x)-2n(x+dx)$. Il faut alors pousser le développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(x_0+dx,y_0,z_0,t_0) \simeq f(x_0,y_0,z_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0,t_0)dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0,t_0)dx^2$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
n(x+2dx)+n(x)-2n(x+dx) &\simeq \left(n + (2dx)\partial_x n + \frac{1}{2}(2dx)^2\partial_x^2 n\right) + (n) - 2\left(n + dx\partial_x n + \frac{1}{2}(dx)^2\partial_x^2 n\right) \\
&= (n+n-2n) + (2dx - 2dx)\,\partial_x n + \left(2dx^2 - dx^2\right)\partial_x^2 n \\
&= \partial_x^2 n\, dx^2
\end{aligned}$$

Établir une jolie équation différentielle

Il n'y a plus qu'à simplifier les termes pour établir l'équation bilan de la quantité

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = \mathcal{C} - \mathcal{P}$$

Soupoudrez de relations supplémentaires

En fonction du problèmes, différentes relations supplémentaires peuvent être alors utiles :

- Diffusion de particules : loi de Fick $\overrightarrow{j_N} = -D\overrightarrow{\text{grad}}n$
- Diffusion de chaleur : loi de Fourier $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}}T$
- Premier principe de la thermo : $dU = \delta Q + \delta W$

etc.

Penser à vérifier

En plus de l'homogénéité, on peut facilement tester la cohérence des formules en s'assurant que les quantités infinitésimales soient bien du même ordre. Il n'y a aucun sens à garder des termes d'ordre 2 si des termes d'ordre 1 sont encore présents, car ils seront négligeables dans la limite $dx, dy, dz \to 0$.

2 Jouer avec les flux de machins

Quelques définitions

Flux $\Phi_\Sigma(t)$ (d'une quantité au travers d'une surface Σ à un instant t)
La quantité de machins qui traversent la surface Σ entre t et $t+dt$ est $dn_{\text{au travers de }\Sigma} = \Phi_\Sigma(t)dt$.
Attention : le flux est une grandeur algébrique et peut être positif ou négatif en fonction de l'orientation de la surface. La quantité qui traverse la surface dans un sens est l'opposée de la quantité qui la traverse dans l'autre sens.

Flux infinitésimal $d\Phi(\vec{r},t)$ (d'une quantité autour d'un point $\vec{r}$ à un instant t)

La quantité de machins qui traversent une surface infinitésimale dS située en un point $\vec{r}$ entre t et $t+dt$ s'écrit $d\Phi(\vec{r},t)$.

On a donc

$$\Phi(t) = \iint_\Sigma d\Phi(\vec{r},t) \qquad\qquad dn_{\text{au travers de }\Sigma} = \iint_\Sigma d\Phi(\vec{r},t)\,dt$$

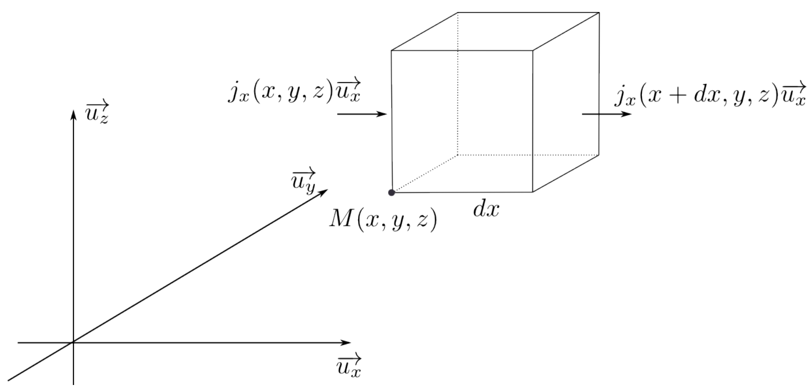
Densité de flux $\vec{j}\,(\vec{r},t)$ (d'une quantité en un point $\vec{r}$ à l'instant t)

Le flux infinitésimal $d\Phi(\vec{r},t)$ d'une quantité au travers d'une surface dS s'écrit $d\Phi(\vec{r},t) = \vec{j}\,(\vec{r},t)\,.\vec{dS}$ et on a donc

$$\Phi(t) = \iint_\Sigma \vec{j}\,(\vec{r},t)\,.\vec{dS} \qquad\qquad dn_{\text{au travers de }\Sigma} = \iint_\Sigma \vec{j}\,(\vec{r},t)\,.\vec{dS}\,dt$$

Un mot sur les variables ou comment savoir si on doit exprimer les quantités en x et ou en $x+dx$.

On est souvent amené à exprimer un flux infinitésimal au travers d'une surface bien précise. Par exemple, on peut chercher à exprimer la quantité de particules qui traversent la surface $dy_0 dz_0 \vec{u_x}$ en x_0 ou en x_0+dx_0 (voir figure 1).



En réalité, il faudrait intégérer la densité de flux sur la surface correspondante et exprimer $d\phi(x_0) = \int_{y=y_0}^{y_0+dy_0}\int_{z=z_0}^{z_0+dz_0} \vec{j}(x_0,y,z).\,(dydz\vec{u_x})$.

Comme on ne considère qu'une surface infinitésimale, on peut écrire $\int_{y=y_0}^{y_0+dy_0}\int_{z=z_0}^{z_0+dz_0} \vec{j}(x_0,y,z).\,(dydz\vec{u_x}) \simeq \vec{j}(x_0,y_0,z_0).\vec{u_x}dy_0dz_0$.

Il faut cependant se rendre compte que les variables x_0 et y_0, z_0 ne jouent pas exactement le même rôle.

- x_0 est bien fixé : sur toutes la surface infinitésimale dS, les points ont la même coordonnée x_0 (ou x_0+dx_0 si on considère l'autre surface). On n'a donc pas le choix d'utiliser x_0 ou x_0+dx_0 ou $x_0+\frac{1}{2}dx_0$ ou n'importe quoi d'autre : la coordonnée est déterminée par la surface sur laquelle on intègre.
- y_0 et z_0 sont plus flottantes. Les points de la surface dS ont des coordonnées comprises entre y_0 et y_0+dy_0 (idem en z). On prend l'expression du vecteur $\vec{j}$ en (x_0,y_0,z_0) parce que c'est le plus simple, mais on pourrait aussi bien utiliser $\vec{j}(x_0,y_0+dy_0,z_0+\frac{dz_0}{2})$ ou n'importe quoi d'autre pour approximer l'intégrale $\int_{y=y_0}^{y_0+dy_0}\int_{z=z_0}^{z_0+dz_0} \vec{j}(x_0,y,z).\,(dydz\vec{u_x})$. Cependant, quelle que soit l'expression choisie, les résultats seront identiques lorsqu'à la fin du calcul on fait tendre $dx_0, dy_0, dz_0 \to 0$. On peut donc bien se permettre de prendre l'expression la plus simple.

Différentes surfaces infinitésimales

En cartésien Coordonnées : (x,y,z), $\vec{dr} = dx\vec{u_x} + dy\vec{u_y} + dz\vec{u_z}$

Surface infinitésimale à x constant autour de (x_0,y_0,z_0)

$$\vec{dS} = dydz\vec{u_x}$$

Surface infinitésimale à y constant autour de (x_0,y_0,z_0)

$$\overrightarrow{dS} = dxdz\overrightarrow{u_y}$$

Surface infinitésimale à z constant autour de (x_0, y_0, z_0)

$$\overrightarrow{dS} = dxdy\overrightarrow{u_z}$$

En cylindrique Coordonnées : (r, θ, z), $\overrightarrow{\nabla} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$

Surface infinitésimale à r constant autour de (r_0, θ_0, z_0)

$$\overrightarrow{dS} = r_0 d\theta dz\overrightarrow{u_{r_0}}$$

Surface infinitésimale à θ constant autour de (r_0, θ_0, z_0)

$$\overrightarrow{dS} = drdz\overrightarrow{u_{\theta_0}}$$

Surface infinitésimale à z constant autour de (r_0, θ_0, z_0)

$$\overrightarrow{dS} = r_0 drd\theta\overrightarrow{u_z}$$

En sphérique Coordonnées : (r, θ, φ), $\overrightarrow{dr} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$

Surface infinitésimale à r constant autour de $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$

$$\overrightarrow{dS} = r_0^2 \sin\theta_0 d\theta d\varphi\overrightarrow{u_{r_0}}$$

Surface infinitésimale à θ constant autour de $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$

$$\overrightarrow{dS} = r_0 \sin\theta_0 drd\varphi\overrightarrow{u_{\theta_0}}$$

Surface infinitésimale à φ constant autour de $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$

$$\overrightarrow{dS} = r_0 drd\theta\overrightarrow{u_{\varphi_0}}$$