Electromagnétisme : induction

1 Cadre théorique : électromagnétisme dans un conducteur

Hypothèses

- Hypothèse de Born Oppenheimer : on considère des électrons (légers) mobiles dans un réseau d'ions immobiles (car beaucoup plus lourds).
  - Dans un volume élémentaire $d\tau$ il y a autant d'électrons que de charges positives portées par les ions. Le milieu est donc localement neutre : $\rho = 0$.
  - Pour rappel, pour des particules de charge q_k, de densité n_k et de vitesse $\overrightarrow{v_k}$, on a

    $$\overrightarrow{j_k} = q_k n_k \overrightarrow{v_k} \qquad \rho_k = q_k n_k$$

    La densité de courant et la charge volumique totales sont obtenues en sommant sur tous les porteurs de charge.

- Quand on soumet le milieu à un champ $\overrightarrow{E}$, il apparait un courant relié au champ électrique par la loi d'Ohm locale :

  $$\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$$

  Pour le montrer, on part du PFD appliqué à un électron et on modélise les interactions entre électrons et avec les ions par une force de frottement $\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$. On a donc

  $$m_e \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E} - \frac{1}{\tau}\overrightarrow{j}$$

  Approche 1 : régime statique pour $\overrightarrow{j}$

  Dans ce cas, on a

  $$0 = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E} - \frac{1}{\tau}\overrightarrow{j}$$

  donc

  $$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

  Approche 2 : régime stationaire avec $\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}$

  On cherche $\overrightarrow{j}$ sous la forme $\overrightarrow{j_0}e^{i\omega t}$ et on a

  $$i\omega\overrightarrow{j} = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E} - \frac{1}{\tau}\overrightarrow{j}$$

  donc

  $$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

  Ces expressions de la conductivité correspondent au modèle de Drude.

  Remarque : En présence d'un champ magnétique, le courant $\overrightarrow{j}$ n'est plus forcément dans la même direction que le champ électrique $\overrightarrow{E}$[1]. Pour relier les deux, en tenant compte de la linéarité du sysètme, il faut alors utiliser une expression matricielle :

  $$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

[1] c'est le principe de l'effet Hall classique

Le modèle de Drude est isotrope, ce qui revient à prendre $\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$ (voir le cours sur les milieux homogène isotrope et linéaire pour analogie).

- On se place dans le régime de l'ARQS $\Leftrightarrow$ on néglige le courant de déplacement devant le courant de charge $\Leftrightarrow \overrightarrow{j} \gg \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

2 Conséquences

2.1 Effet de peau

Description

un champ oscillant voit son amplitude exponentiellement amortie en pénétrant dans un conducteur. La longueur caractéristique de cette décroissance est donne par

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

Démonstration

Equation générale

Les équations de Maxwell donnent

$$div\overrightarrow{E} = 0 \qquad div\overrightarrow{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{E}$$

En prenant le rotationel de l'équation de Maxwell Faraday, on obtient

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

soit

$$\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Résolution dans un cas particulier

Prenons une situation particulière : un métal occupe le demi espace $z > 0$ et en $z = 0$ se trouve une onde $E_0 e^{i\omega t}\overrightarrow{u_x}$. On veut trouver la valeur du champ dans le métal. On cherche une solution à variable séparable : $\overrightarrow{E} = f(z)g(t)\overrightarrow{u_x}$. Comme cette solution vérifie $\Delta\overrightarrow{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$, on doit avoir $\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \mu_0\sigma\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t}$. Cette égalité ne peut être vérifiée pour tout t et tout z que si chacun des membres est constant.

- Résolution pour g
  On a donc $\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t} = cste = K$ donc $g = g_0 e^{Kt}$ et $\overrightarrow{E}(z = 0^+, t) = f(0) g_0 e^{Kt}\overrightarrow{u_x}$. Or la compostante tangentielle du champ électrique est toujours continue à la traversée d'une interface donc $\overrightarrow{E}(z = 0^+, t) = \overrightarrow{E}(z = 0^-, t) = E_0 e^{i\omega t}\overrightarrow{u_x}$. Comme les exponentielles forment une famille de fonction libres, l'égalité $E_0 e^{i\omega t} = f(0) g_0 e^{Kt}$ ne peut être vérifiée pour tout t que si $K = i\omega$.
  On a donc
  $$g(t) = g_0 e^{i\omega t}$$

- Résolution pour f
  On vient de montrer que $\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = i\mu_0\sigma\omega$. On en déduit donc $f(z) = Ae^{\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}z} + Be^{-\sqrt{i\mu_0\sigma\omega}z}$. Avec $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, on peut écrire $f(z) = Ae^{\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}z}e^{i\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}z} + Be^{-\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}z}e^{-i\sqrt{\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}}z}$. Pour que la solution ait un sens physique, il faut qu'elle reste bornée lorsque $z \to +\infty$. On doit donc choisir $A = 0$ et on obtient

$$f(z) = Be^{-\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z} e^{-i\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z}$$

- Résolution pour $\overrightarrow{E}$

  On obtient finalement $\overrightarrow{E} = Bg_0 e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z\right)} e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z} \overrightarrow{u_x}$. En utilisant la continuité du champ en $z = 0$, on détermine $Bg_0 = E_0$ et on obtient ainsi

$$\overrightarrow{E} = E_0 e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z\right)} e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z} \overrightarrow{u_x},$$

  soit, en repassant en réel,

$$\overrightarrow{E} = E_0 e^{-\sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z} cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}}z\right) \overrightarrow{u_x}$$

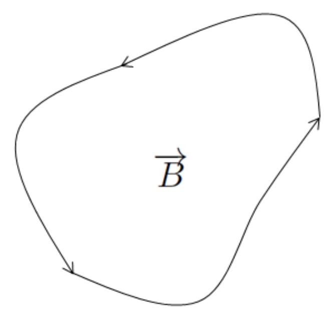
2.2 Conducteur parfait

Dans un conducteur parfait, on néglige la force de “frottement”, ce qui revient à prendre $\tau \rightarrow +\infty$. On a dans ce cas $\sigma \rightarrow +\infty$ et la longueur de peau δ tend vers 0. Ceci veut dire qu'un champ électrique ou magnétique oscillant ne peut pas rentrer dans un métal parfait (le champ est nul en tout point à l'intérieur du métal). Par continuité des champs, ceci peut impliquer l'apparition de courants ou de charges à surface du métal et surtout l'apparition d'un champ réfléchi qui compense le champ incident à l'interface. On retiendra l'idée suivante :

métal parfait $\Rightarrow$ champ nul en tout point à l'intérieur $\Rightarrow$ apparition d'un champ réfléchi

2.3 Induction

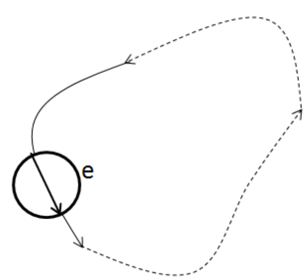
En utilisant les hypothèses présentés précédemment, on s'intéresse à un circuit filiforme plongée dans un champ magnétique. On va décomposer le phnéomène d'induction étape par étape :



1. Une variation du flux magnétique crée l'apparition d'un champ électrique donc d'une force électromotrice.

   L'équation de Maxwell Faraday $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ donne par le théorème de Stokes :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl} = -\frac{d\phi}{dt},$$



   avec

   - e la force électromotrice
   - $\mathcal{C}$ le contour du circuit
   - $\overrightarrow{E}$ le champ électrique
   - $\overrightarrow{E_m}$ le champ électromoteur
   - ϕ le flux de $\overrightarrow{B}$ au travers d'une surface s'appuyant sur le circuit.

   On a donc toujours au moins 2 façons de calculer e : soit avec $-\frac{d\phi}{dt}$ soit avec $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl}$.

   Remarques

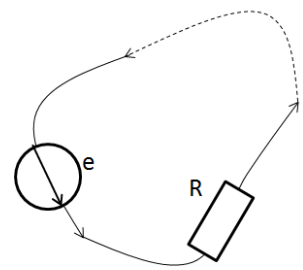
(a) Quelles différences y a t il entre le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ électromoteur $\overrightarrow{E_m}$?
Le champ électromoteur est la partie du champ électrique de circulation non nulle. Il n'a pas de réalité physique (on ne peut pas mesurer avec un détecteur le champ électromoteur en un point) et il faut le voir comme une technique de calcul. Il faut connaitre son expression dans deux cas simples

i. Circuit fixe dans un champ magnétique variable :
$$\overrightarrow{E_m} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$
ii. Circuit se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v_e}$ dans un champ magnétique statique :
$$\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{v_e} \wedge \overrightarrow{B}$$

(b) Une infinité de surfaces s'appuient sur le circuit. Au travers de laquelle faut il calculer ϕ ?
Le champ $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif, donc le flux au travers de toutes les surfaces s'appuyant sur le même contour est le même.

2. La force électromotrice crée une intensité dans le circuit.

L'apparition du courant est due à la résistance du circuit.



Soit on donne R (auquel cas $I = \frac{e}{R}$),

Soit on détermine R à partir de l'expression de $\overrightarrow{E}$: dans le métal qui constituent le circuit, la présence du champ électrique engendre un courant $\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$ donc $e = \oint\limits_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{\overrightarrow{j}}{\sigma}.\overrightarrow{dl}$. Or dans le fil, $\overrightarrow{j}$ est suivant $\overrightarrow{dl}$ et en notant s la section du fil, $I = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS} = j.s$ donc $e = \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{I}{\sigma s} dl = \frac{I}{\sigma s} \oint\limits_{\mathcal{C}} dl = \frac{L}{\sigma s} I$ donc $R = \frac{L}{\sigma s}$ (et $I = \frac{e}{R}$).

3. L'intensité qui parcourt le circuit à 3 effets

(a) Un effet mécanique
Chaque portion $\overrightarrow{dl}$ du circuit subit une force de Laplace
$$\overrightarrow{dF} = I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$
Remarque : lien entre force de Laplace et force de Lorentz
Le courant est un déplacement de charges. Or ces charges se déplacent dans un champ magnétique. Chacune d'entre elle subit donc la force $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. Dans une portion dl du circuit se trouvent un nombre $dn = \rho s dl$ de particules ; la force qui s'exerce sur cette portion est donc $\overrightarrow{dF} = dn\,\overrightarrow{f} = (\rho q \overrightarrow{v} s dl) \wedge \overrightarrow{B} = \left(\overrightarrow{j} s dl\right) \wedge \overrightarrow{B} = js\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$.
La force de Laplace est donc simplement la résultant de la force de Lorentz pour un morceau de circuit.

(b) L'apparition d'un flux propre
Le circuit est parcouru par un courant I. Ce courant crée un champ magnétique qui lui même crée un flux magnétique au travers du circuit. On appelle ce flux *"flux propre"* ou *"self inductance"* et on le note
$$\phi_p = LI$$
Le champ électromoteur est donc modifié : $RI = e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - \frac{d\phi_p}{dt} = e_0 - \frac{dLI}{dt}$. Si L est constante, $e = e_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$ soit $RI + L\frac{dI}{dt} = e_0$: la prise en compte de la self inductance revient à rajouter un bobine L dans le circuit.

(c) L'apparition d'un flux mutuel

Le circuit A est parcouru par un courant I_A. Ce courant crée un champ magnétique qui lui même crée un flux magnétique au travers d'un circuit B. On appelle ce flux *"flux mutuel"* et on le note

$$\phi_M^{A\to B} = MI_A$$

Le champ électromoteur dans le circuit B est donc modifié : $R_B I_B = e_B = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\phi_{B,ext}}{dt} - \frac{d\phi_M^{A\to B}}{dt} = e_{B,0} - \frac{dMI_A}{dt}$. Si M est constante, $e_B = e_{B,0} - M\frac{dI_A}{dt} = R_B I_B$ soit $M\frac{dI_A}{dt} + R_B I_B = e_0$: la prise en compte de l'inductance mutuelle revient à rajouter un couplage entre les circuits A et B.

Théorème : l'inductance mutuelle de A vers B est la même que celle de B vers A

$$\phi_M^{A\to B} = MI_A \Leftrightarrow \phi_M^{B\to A} = MI_B$$

3 Conseils généraux

- Toujours commencer par faire un dessin EN ORIENTANT les contours (et les surfaces).
- Savoir utiliser la loi de Lenz pour pouvoir la ressortir sur (presque) toutes les questions qualitatives : les phénomènes crées s'opposent à ce qui leur a donné naissance (en créant un champ magnétique opposé au champ initial par exemple). C'est donc une loi de modération.
- Attention pour les circuits déformables : L et M peuvent changer au cours du temps. Dans ce cas, revenir à $\phi_p = LI$ ou $\phi_M = MI$ pour en déduire l'expression du champ électromoteur ($L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}$ et pas seulement $L\frac{dI}{dt}$)
- Pour traiter un circuit non filiforme (induction dans un conducteur massif), on décompose le milieu en circuits filiformes élémentaires et on intégre à la fin.
- ATTENTION aux signes, c'est l'une des sources d'erreurs les plus classique. Le signe du flux dépend de l'orientation de la surface.
- ATTENTION aux spires, c'est une autre source d'erreur classique. Le flux au travers de N spires confondues vaut N fois le flux au travers d'une spire.

Exercices à savoir traiter

- Champ magnétique sur l'axe d'une spire
- Flux d'un aimant $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ au travers d'une spire
- Chute d'un cadre conducteur dans un champ magnétique
- Rails de Laplace
- Roue de Barlow