Electromagnétisme : autour des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell

Maxwell - Gauss $div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Maxwell - Flux $div\overrightarrow{B} = 0$

Maxwell - Faraday $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

Maxwell - Ampère $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

1. Les équations de Maxwell sont linéaires, ce qui les rend particulièrement fortes. Cela implique que les champs crées par une superposition de charges sont égaux à la superposition des champs crées par chacune des charges prise isolément. On peut donc chercher la forme d'un champ quelconque comme une superposition de champs sinusoïdaux, par transformation de Fourier.

2. En régime non statique, les champs $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{E}$ sont *couplés* par les équations de MF et MA. Il ne peut donc pas y avoir un champ sans l'autre.

3. Chacune des équations de Maxwell correspond à une condition de raccordement :

   $MG \Leftrightarrow \overrightarrow{E_N^2} - \overrightarrow{E_N^1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n_{12}}$

   $M\phi \Leftrightarrow \overrightarrow{B_N^2} = \overrightarrow{B_N^1}$

   $MF \Leftrightarrow \overrightarrow{E_T^2} = \overrightarrow{E_T^1}$

   $MA \Leftrightarrow \overrightarrow{B_T^2} - \overrightarrow{B_T^1} = \mu_0\overrightarrow{j_s}$

4. Chacune des équations de Maxwell correspond à un théroème intégral :

   $MG \Leftrightarrow \oiint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\rho_{int}}{\epsilon_0}$ Théorème de Gauss

   $M\phi \Leftrightarrow \oiint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = 0$ Conservation du flux de $\overrightarrow{B}$

   $MF \Leftrightarrow \oint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ Théorème de Faraday

   $MA \Leftrightarrow \oint \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0\left(I + I_D\right)$ Théorème d'Ampère

5. En découplant les équations de Maxwell, on obtient l'équation de propagation des ondes. Pour cela, on forme $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot} = \overrightarrow{grad}\left(div\right) - \overrightarrow{\Delta}$.

   On obtient alors :

   $\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$

   $\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$

   - $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{E}\right) - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}$ d'après MG dans le vide.
     et $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overrightarrow{E}$ en utilisant le théorème de Schwarz et MA dans le vide.
   - Les solutions des équations de propagation sont de la forme $f\left(t - \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{r}}{c}\right) + g\left(t + \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{r}}{c}\right)$: un terme se propageant dans le sens de $\overrightarrow{u}$, un terme se propageant dans l'autre direction.

6. Les équations de Maxwell donnent également le théorème de Poynting, c'est-à-dire la conservation de l'énergie. Pour cela, on multiplie les dérivées temporelles par le champ pour obtenir la dérivée d'un carré et on utilise $div\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} - A.\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}$

   $\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}.\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}.\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}B^2\right)$

   $\epsilon_0\overrightarrow{E}.\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{rot}\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right)$

   $$\text{soit } div\left(\overrightarrow{\Pi}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2\right) = -\overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}$$

7. Les équations de Maxwell montrent l'existence de potentiels :

- $\overrightarrow{A}$, potentiel vecteur tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$.
- V, potentiel électrique, tel que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$.

Ces potentiels sont définis à un choix de jauge près, c'est-à-dire que tout changement $\begin{cases} \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A} + \overrightarrow{grad}\chi \\ V \to V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$ laisse les champs physiques invariants.

8. Les équations de Maxwell assurent la conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = div\left(\epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = div\left(\overrightarrow{rot}\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}\right) - div\overrightarrow{j}$$

et comme $div\left(\overrightarrow{rot}\right) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\overrightarrow{j} = 0$$

Expressions des termes de source

Dans un métal

- il existe des charges libres et on exprime la densité de courant par
$$\overrightarrow{j} = \Sigma_{type} n_\alpha^* q_\alpha \overrightarrow{v_\alpha}$$
où n_α^* est la densité volumique des porteurs de charge de type α (= électron, proton, ...), q_α leur charge et $\overrightarrow{v_\alpha}$ leur vitesse.
De manière plus générale, on utilise la loi d'Ohm locale (obtenue par exemple en appliquant le principe fondamental de la dynamique aux porteurs de charge)
$$\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$$
- il n'y a pas de densité volumique de charge

Dans un milieu diélectrique (isolant)

- les électrons sont liés aux atomes et on introduit la densité de polarisation $\overrightarrow{P} = \frac{d\overrightarrow{p}}{d\tau}$. Dans un milieu linéaire, on relie cette densité de polarisation aux champs appliqués par la susceptibilité du milieu
$$\overrightarrow{P} = \epsilon_0 \left[\chi\right] \overrightarrow{E}$$
- La densité de polarisation génère des charges et des courants

$$\rho = -div\overrightarrow{P} \qquad\qquad \overrightarrow{j} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial t}$$

Ondes planes progressive sinusoïdales

On se place dans le cas où on cherche les solutions sous la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \phi\right)$ soit $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}e^{i\left(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \phi\right)}$ en notation complexe.

On a alors $\overrightarrow{\nabla} = -j\overrightarrow{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$.

ATTENTION: les signes sont ici affaires de convention. On aurait pu prendre $\overrightarrow{E_0}e^{i\left(-\omega t + \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \phi\right)}$, auquel cas $\overrightarrow{\nabla} = +j\overrightarrow{k}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$.
IL FAUT CHOISIR LE SIGNE DU TERME TEMPOREL ET NE PAS EN CHANGER POUR TOUT LE PROBLEME.

Les équations de Maxwell donnent alors la structure de l'onde :

$$MG \Leftrightarrow \overrightarrow{k}.\overrightarrow{E} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{E} \qquad MF \Leftrightarrow \overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E}}{c} \qquad M\phi \Leftrightarrow \overrightarrow{k}.\overrightarrow{B} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{B}$$

Elles donnent également la relation de dispersion : $f(k) = g(w)$. Pour une onde dans le vide, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. On dit qu'un milieu est non dispersif si k est proportionnel à ω.