Mécanique des fluides : écoulements particuliers

1 Ecoulement de Couette

1.1 Position du problème et hypothèse

Un fluide visqueux de coefficient de viscosité η est compris entre deux plans, $z = 0$, immobile et $z = h$, en translation rectiligne uniforme suivant $V_0\overrightarrow{u_x}$.

- On suppose l'écoulement stationaire :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = 0$$

- On suppose l'écoulement incompressible :

$$div\,\overrightarrow{v} = 0$$

- On suppose la vitesse unidimensionnelle :

$$\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{u_x}$$

- On suppose le problème invariant par translation suivant y :

$$\overrightarrow{v}(x, y, z) = \overrightarrow{v}(x, z)$$

1.2 Profil de vitesse

D'après les hypothèses, on a

$$div\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}(x, z) = 0$$

donc $\overrightarrow{v}$ est de la forme $\overrightarrow{v} = v_x(z)\overrightarrow{u_x}$.
On en déduit que

$$\Delta\overrightarrow{v} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\overrightarrow{u_x}$$

$$\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = v_x\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial x} = 0$$

L'équation de Navier Stockes $\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{g}$ donne alors

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \end{cases}$$

La deuxième équation donne $P(x, z) = f(x) - \rho g z$, ce qui, reporté dans la première équation, donne $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2}$. On a donc égalité $\forall x, z$ de deux fonctions de variables indépendantes. Ceci n'est possible que pour $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} = \kappa$ constante. Or $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \kappa \Rightarrow P(x, z) = \kappa x - \rho g z$ et le problème n'est pas borné suivant x. On a donc $\kappa = 0$, sans quoi la pression pourrait devenir négative. On en déduit donc $v_x(z) = Az + B$.

Pour déterminer ces constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites :

- En $z = 0$, le fluide est au contact avec le sol immobile. Comme il est visqueux, sa vitesse est la même que celle de la paroi : $v_x(0) = 0$.
- En $z = 0$, le fluide est au contact avec la paroi en translation. Comme il est visqueux, sa vitesse est la même que celle de la paroi : $v_x(0) = V_0$.

On en déduit l'expression du champ de vitesse dans le fluide :

$$v_x(z) = V_0 \frac{z}{h}$$

1.3 Questions annexes :

Quel est le débit de l'écoulement au travers d'une section $\sigma = L \times h$?

- Le débit volumique est donné par

$$D_v = \iint_\sigma \overrightarrow{v}(P).\overrightarrow{dS}.$$

  Ici, avec $\overrightarrow{dS} = dzdy\overrightarrow{u_x}$, $D_v = \frac{LV_0}{h} \int zdz = \frac{LhV_0}{2}$
- Le débit massique est donné par

$$D_m = \iint_\sigma \rho\overrightarrow{v}(P).\overrightarrow{dS}.$$

  Comme ρ est constant dans un fluide incompressible, $D_m = \rho D_v$.

Quelle force / quelle puissance l'opérateur doit il exercer sur la plaque pour maintenir $\overrightarrow{V_0}$? on notera $L_x \times L_y$ les dimensions de la plaque.

- Sur une surface dS, le fluide exerce une force de viscosité $\overrightarrow{df} = -\eta dS \frac{\partial v_x}{\partial z}\overrightarrow{u_x} = -\eta \frac{V_0}{h} dS\overrightarrow{u_x}$. La force exercée sur l'ensemble de la plaque vaut donc

$$\overrightarrow{F_{fluide \rightarrow plaque}} = -\frac{\eta V_0}{h} L_x L_y \overrightarrow{u_x}$$

  Le force de l'opérateur doit compenser cette force, donc

$$\overrightarrow{F_{op}} = \frac{\eta V_0}{h} L_x L_y \overrightarrow{u_x}$$

- Par action réciproque, la plaque exerce sur une portion dS du fluide une force $\overrightarrow{df'} = -\overrightarrow{df} = \eta \frac{V_0}{h} dS\overrightarrow{u_x}$. Cette force est exercée sur une particule fluide de vitesse $V_0\overrightarrow{u_x}$, sa puissance est donc $d\mathcal{P} = \overrightarrow{df'}.(V_0\overrightarrow{u_x}) = \eta \frac{V_0^2}{h} dS$ (> 0, c'est une force motrice). La puissance totale fournie par la plaque au liquide vaut donc $\mathcal{P}_{plaque \rightarrow liquide} = \frac{\eta V_0^2}{h} L_x L_y /$ Le bilan d'énergie de la plaque doit être nul, donc l'opérateur doit compenser cette perte de puissance :

$$\mathcal{P}_{op} = \frac{\eta V_0^2}{h} L_x L_y$$

2 Ecoulement de Poiseuille

2.1 Position du problème et hypothèse

Un fluide visqueux de coefficient de viscosité η est compris dans un cylindre de rayon R. On note P_0 la pression en $z = 0$, $r = 0$ et$\Delta P = P(z = L, r = 0) - P(z = 0, r = 0)$.

- On suppose l'écoulement stationaire :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = 0$$

- On suppose l'écoulement incompressible :

$$div \overrightarrow{v} = 0$$

- On suppose la vitesse unidimensionnelle :

$$\overrightarrow{v} = v_z \overrightarrow{u_z}$$

- On suppose le problème invariant par rotation autour de $\overrightarrow{u_z}$:

$$\overrightarrow{v}(r,\theta,z) = \overrightarrow{v}(r,z)$$

- On néglige l'effet de la pesanteur.

2.2 Profil de vitesse

La divergence en coordonnée cylindrique est donnée par $div\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$. La condition d'incompressibilité du fluide donne alors

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}(r,z) = 0.$$

On en déduit donc, avec $\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{u_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$, que $\left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = \left(v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)v_z\overrightarrow{u_z} = 0$. L'équation de Navier Stockes $\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$ donne alors, avec $\Delta v_z\overrightarrow{u_z} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{u_z}$,

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \end{cases}$$

On tire des deux premières relations $P(r,\theta,z) = P(z)$. La dernière relation est donc une égalité de deux fonctions de variable indépendantes. On a donc

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \kappa.$$

On en déduire $P(z) = P_0 + \kappa z$ et comme $\Delta P = P(L) - P(0)$, on a

$$P(z) = P(0) + \frac{\Delta P}{L}z.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) &= \frac{\Delta P}{L} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \frac{\Delta P}{\eta L}r \\ \Leftrightarrow \quad r\frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{2} + A \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r}{2} + \frac{A}{r} \\ \Leftrightarrow \quad v_z(r) &= \frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{4} + A\,ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + B \end{aligned}$$

Or les conditions au limites imposent

$$|v_z(0)| < \infty$$

$$|v_z(R)| = 0 \text{ car le fluide est visqueux et la paroi immobile}$$

On en déduit donc

$$v_z(r) = -\frac{R^2\Delta P}{4\eta L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Remarque *si $\Delta P > 0$, on trouve une vitesse négative : c'est normal, puisque cela implique que la pression en $z = L$ est plus importante que celle en $z = 0$.*

2.3 Questions annexes

Quel est le débit de l'écoulement au travers d'une section du tuyau ?

- Le débit volumique est donné par

$$D_v = \iint_\sigma \overrightarrow{v}(P).\overrightarrow{dS}.$$

Ici, avec $\overrightarrow{dS} = rdrd\theta\overrightarrow{u_z}$,

$$D_v = -\frac{R^2\Delta P}{4\eta L}\iint_\sigma\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)rdrd\theta = -\frac{2\pi R^2\Delta P}{4\eta L}\left(\iint_\sigma rdr - \iint_\sigma \frac{r^3}{R^2}dr\right)$$

$$= -\frac{2\pi R^2\Delta P}{4\eta L}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^4}{4R^2}\right)$$

$$= -\frac{\pi R^4\Delta P}{8\eta L}$$

- Le débit massique est donné par

$$D_m = \iint_\sigma \rho\overrightarrow{v}(P).\overrightarrow{dS}.$$

Comme ρ est constant dans un fluide incompressible, $D_m = \rho D_v$.

Quelle force est exercée par le fluide sur le tuyau ?

- Sur une surface $dS = rd\theta dz$, le fluide exerce une force de viscosité $\overrightarrow{df} = -\eta dS\frac{\partial v_z}{\partial r}(R)\overrightarrow{u_z} = -\eta\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{R}{2}Rd\theta dz\overrightarrow{u_z}$. La force exercée sur l'ensemble de la plaque vaut donc

$$\overrightarrow{F_{fluide\rightarrow plaque}} = -\pi R^2\Delta P\overrightarrow{u_z}$$

Quelle puissance est dissipée dans le fluide par viscosité ?

- Dans un volume $dV = rdrd\theta dz$, le fluide subit une force de viscosité résultante $\overrightarrow{df_{vis}} = -\eta\Delta v_z dV\overrightarrow{u_z} = \frac{\Delta P}{L}dV\overrightarrow{u_z}$. La puissance dissipée vaut donc

$$\mathcal{P}_{vis} = \iiint\frac{\Delta P}{L}v_z(r)rdrd\theta dz = \iiint\frac{\Delta P}{L}v_z(r)rdrd\theta dz$$

$$= \Delta P\left(\iint_\sigma v_z(r)rdrd\theta\right)$$

$$= \Delta P\times D_v$$