

Optique ondulatoire : résultats principaux

1 Interférences

L'optique ondulatoire repose sur une modélisation simple et un postulat fondamental :

Modélisation

1. La lumière est décrite comme une onde scalaire (on ne prend pas en compte la polarisation ou si on le fait, on considère toutes les ondes polarisées dans la même direction) dont l'amplitude est de la forme $s(\vec{r}, t)$. On se place le plus souvent dans le cas d'onde plane monochromatique (= onde harmonique) qui se met sous la forme $s(\vec{r}, t) = s_0 \exp\left(i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi\right)\right) = s_0 \exp(i(\omega t + \varphi(M)))$.
2. La phase $\varphi(M)$ de l'onde dépend de deux éléments :
 - (a) Le parcours entre le point d'émission et le point M entraîne une phase $\varphi_{parcours} = \int_S^M \vec{k} \cdot d\vec{r}$.
 - (b) Les sauts de phase aléatoire de la source, qui ont lieu tous les $\tau_{coherence}$ entraînent une phase aléatoire φ_{alea} . C'est le modèle du train d'onde.
3. L'intensité mesurée en un point M à l'instant t est proportionnelle à la moyenne temporelle sur le temps caractéristique du détecteur du carré de la norme l'amplitude du champ $\langle |s(M, t)|^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T |s(M, t)|^2 dt$.

Postulat : principe de superposition

Si une source isolée donne naissance à un champ $s_1(\vec{r}, t)$ et une autre un à champ $s_2(\vec{r}, t)$, alors les deux sources donnent naissance à un champ d'amplitude $s(\vec{r}, t) = s_1(\vec{r}, t) + s_2(\vec{r}, t)$

REMARQUES

Convention de signe La convention est donnée par le signe devant le terme temporel de l'exponentielle. Ici, la convention est de prendre $+\omega t$. On peut aussi bien écrire l'exponentielle sous la forme $\exp\left(i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi\right)\right)$. Cela ne fait aucune différence, mais il ne faut EN AUCUN CAS changer la convention au cours de l'énoncée.

Ondes planes Pourquoi utilise-t-on des ondes planes ? Trois raisons principales

- Ce sont les seuls (ou presque) pour lesquels on sait tout bien faire comme il faut.
- C'est une approximation locale correcte, quand on se place dans les conditions de Gauss.
- Les équations de Maxwell étant linéaire, on peut décomposer par transformée de Fourier n'importe quel signal (ou presque) en une somme d'onde plane et obtenir la solution en sommant les résultats obtenus pour chaque onde

1.1 Formule de Fresnel

Considérons deux ondes $s_1(\vec{r}, t)$ et $s_2(\vec{r}, t)$ émettant des ondes monochromatiques observées en un point M . D'après le théorème de superposition,

$$s(\vec{r}_M, t) = s_1(\vec{r}_M, t) + s_2(\vec{r}_M, t) = s_{0,1} \exp\left(i\left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_M + \varphi_1\right)\right) + s_{0,2} \exp\left(i\left(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_M + \varphi_2\right)\right)$$

Par conséquent, l'intensité mesurée en M vaut donc

$$\begin{aligned} I(M) &= \langle |s(M, t)|^2 \rangle_T = \left\langle |s_1(\vec{r}_M, t) + s_2(\vec{r}_M, t)|^2 \right\rangle_T \\ &= \left\langle (s_1(\vec{r}_M, t) + s_2(\vec{r}_M, t))(s_1(\vec{r}_M, t) + s_2(\vec{r}_M, t))^* \right\rangle_T \text{ (astuce diabolique !)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (s_1(\vec{r}_M, t) s_1(\vec{r}_M, t)^* + s_2(\vec{r}_M, t) s_1(\vec{r}_M, t)^* + s_1(\vec{r}_M, t) s_2(\vec{r}_M, t)^* + s_2(\vec{r}_M, t) s_2(\vec{r}_M, t)^*) \rangle_T \text{ en développant} \\
&= \langle |s_1(\vec{r}_M, t)|^2 \rangle_T + \langle 2\text{Re}(|s_1(\vec{r}_M, t) s_2(\vec{r}_M, t)^*|) \rangle_T + \langle |s_2(\vec{r}_M, t)|^2 \rangle_T \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&= I_1 + I_2 + 2\text{Re} \langle |s_1(\vec{r}_M, t) s_2(\vec{r}_M, t)^*| \rangle_T
\end{aligned}$$

Or $s_1(\vec{r}_M, t) s_2(\vec{r}_M, t)^* = s_{0,1} s_{0,2} \exp(i((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1(M) - \varphi_2(M))))$ donc

$$2\text{Re} \langle |s_1(\vec{r}_M, t) s_2(\vec{r}_M, t)^*| \rangle_T = 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1(M) - \varphi_2(M))) \rangle_T$$

La valeur moyenne de ce cosinus n'est non nulle que si son argument ne dépend pas du temps. On en déduit que

- Si $\omega_1 \neq \omega_2$, alors les deux ondes n'interfèrent pas et $I(M) = I_1 + I_2$
- Si $\omega_1 = \omega_2$ et que $\varphi_{1,alea}(M) \neq \varphi_{2,alea}(M)$, alors les deux ondes n'interfèrent pas et $I(M) = I_1 + I_2$
- Si $\omega_1 = \omega_2$ et que $\varphi_{1,alea}(M) = \varphi_{2,alea}(M)$, alors les deux ondes interfèrent et

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos(\varphi_{1,parcours}(M) - \varphi_{2,parcours}(M))$$

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

Ces conditions impliquent

1. Les deux sources doivent avoir la même pulsation (*cohérence temporelle*).
2. Les deux sources doivent émettre le même train d'onde car c'est la seule façon d'avoir les mêmes phases aléatoires (*cohérence spatiale*). Autrement dit :
 - (a) Les deux ondes doivent provenir de la même source physique.
 - (b) La différence de chemin entre les deux ondes doit être plus petite que la longueur de cohérence de l'onde $L_{coh} = \tau_{coh} c$.

1.2 Calcul de différence de marche : comment calculer $\Delta\varphi$?

On peut facilement calculer la différence de phase entre les deux ondes en un point M à l'aide d'un peu de trigonométrie des quelques règles suivantes :

Différence de marche

La différence de marche δ est la différence de chemin optique, c'est à dire la différence entre les longueurs parcourues par les deux rayons.

$$\delta = [SM]_2 - [SM]_1$$

Rigoureusement, le chemin optique est défini comme l'intégrale curviligne du trajet : $[SM]_1 = \int_S^M n(\vec{r}) |\vec{dr}|$. En se rappelant de la définition de la phase liée au parcours de l'onde, $\varphi_{1,parcours} = \int_S^M \vec{k} \cdot \vec{dr} = \int_S^M |\vec{k}| |\vec{dr}|$ (car la lumière se déplace suivant son vecteur d'onde) $= \int_S^M \frac{2\pi}{\lambda} |\vec{dr}| = \int_S^M \frac{2\pi}{\lambda} |\vec{dr}| = \int_S^M \frac{2\pi}{\lambda_0/n(\vec{r})} |\vec{dr}| = \frac{2\pi}{\lambda_0} [SM]_1$.

On peut donc relier la différence de marche à un déphasage de la façon suivante :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

Déphasage entre deux points

Pour une onde plane, on peut relier la phase d'un point situé en \vec{r}_1 à celle d'un point située en \vec{r}_2 car $\varphi(\vec{r}_1) = -\vec{k} \cdot \vec{r}_1$ et $\varphi(\vec{r}_2) = -\vec{k} \cdot \vec{r}_2 = -\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. On a donc

$$\varphi(M) = \varphi(O) - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$$

On en déduit le théorème de Malus

Théorème de Malus

Les surfaces équiphasées sont perpendiculaires aux rayons lumineux.

Déphasage ondulateur

Il existe 3 situations qui engendrent un saut de phase supplémentaire de π sur le chemin optique :

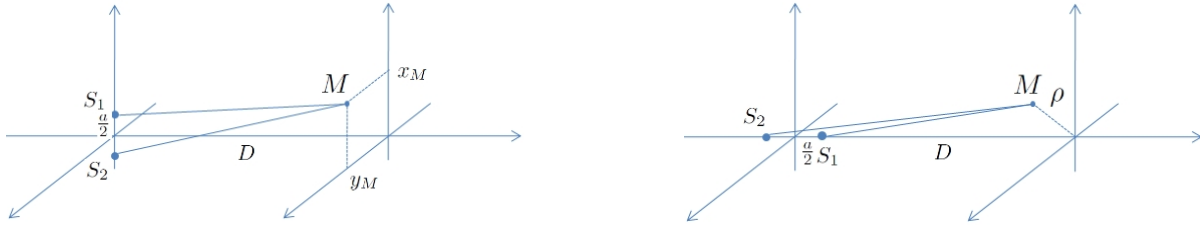
- Réflexion sur un métal parfait (typiquement sur un miroir)
- Réflexion vitreuse (ie sur un indice $n_2 > n_1$)
- Passage par le foyer d'une lentille (phase de Gouy)

1.3 Deux calculs fondamentaux

Il suffit de déterminer la différence de marche entre deux rayons atteignant un point M de l'écran pour déterminer l'intensité, grâce à la formule de Fresnel.

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)$$

Il nous faut donc calculer $\delta = [S_2M] - [S_1M]$, dans les deux cas suivants



1.3.1 Sources perpendiculaires

En utilisant les coordonnées des points, $[S_2M] = \sqrt{\left(x_M + \frac{a}{2}\right)^2 + y_M^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \frac{x_M^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{x_M a}{D^2} + \frac{y_M^2}{D^2}} \simeq D\left(1 + \frac{x_M a}{2D^2}\right)$ au premier ordre.

De la même manière, $[S_1M] = D\left(1 - \frac{x_M a}{2D^2}\right)$, d'où

$$\delta = \frac{x_M a}{D}$$

1.3.2 Sources alignées

On utilise une décomposition en vecteur : $[S_2M] = \|\overrightarrow{S_2M}\| = \|\overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(\overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{OM}}$

$$= \sqrt{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{S_2O} + \overrightarrow{S_2O} \cdot \overrightarrow{S_2O}}$$

$$= OM\sqrt{1 + 2\frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{S_2O}}{OM^2} + \frac{a^2}{4OM^2}}$$

d'où on déduit $[S_1M] \simeq OM + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{S_2O}}{OM}$ et $[S_2M] \simeq OM + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{S_1O}}{OM}$, donc

$$\delta = \overrightarrow{S_2S_1} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = a\cos\theta \simeq a\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \simeq a\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{D^2}\right)$$

1.4 Les questions habituelles

A partir de ces calculs, on peut vous demander les points suivants :

Interfrange

Par définition, l'interfrange est la plus petite quantité \vec{i} telle que $I(M) = I(M + \vec{i})$. Il n'y a plus qu'à remplacer dans l'expression de l'intensité et à résoudre.

Contraste

Par définition, le contraste est le rapport $\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ et il ne reste plus qu'à le calculer.

Ordre d'interférence

On définit l'ordre p d'interférence par la relation $\delta = p\lambda$. Les interférences sont constructives si $p \in \mathbb{N}$ et destructives si $p \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. A nouveau, il suffit de remplacer dans les expressions.

On croise en particulier la notion d'ordre d'interférence pour les anneaux. On a alors la relation $\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{D^2}\right) = p \frac{\lambda}{a}$ et on en déduit le rayon de l'anneau du p^{ieme} ordre : $\rho_p = D \sqrt{2 \left(1 - p \frac{\lambda}{a}\right)}$.

Source polychromatique

On sait que pour une source polychromatique, chaque longueur d'onde donne naissance à une figure en interférant avec elle même mais n'interfère pas avec les autres longueurs d'onde. On calcul donc pour un λ donné $I_\lambda(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\right)$, puis on additionne toutes les intensités

$$I_{totale}(M) = \Sigma_\lambda I_\lambda(M) = \int_{spectre} i_\lambda(M) d\lambda$$

Pour deux longueurs d'ondes proches, on obtient un battement.

Source étendue

On sait que pour des sources physiquement différentes, la lumière émise par chaque point interfère avec elle même mais n'interfère pas avec la lumière émise par un autre point. On calcul donc pour un point P de la source $I_P(M) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(P)\right)\right)$ puis on additionne toutes les intensités

$$I_{totale}(M) = \Sigma_P I_P(M) = \int_{source} i_P(M) dP$$

2 Diffraction

La diffraction repose sur le principe d'Huygens Fresnel, qui faut savoir énoncé avec des mots et formuler mathématiquement

Principe de Huygens Fresnel

Lorsqu'une onde arrive sur une pupille, chaque point de cette pupille se comporte comme une source secondaire qui réemet vers l'avant une onde d'amplitude proportionnelle à l'onde incidente. Les différentes ondes ainsi émises sont cohérentes et interfèrent donc.

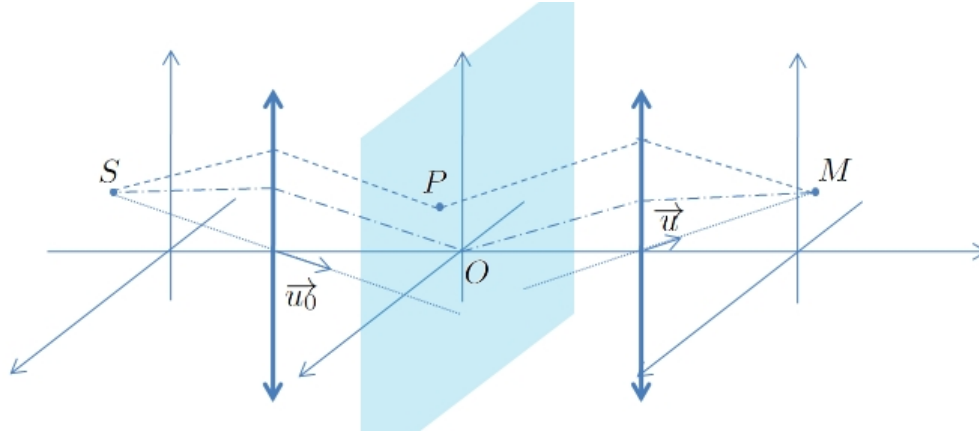
Une pupille de diffraction n'est donc rien d'autre qu'une source étendue cohérente spatialement !

2.1 Formule de Franhoffer

Conditions de Franhoffer

- La source éclairant la pupille est placée à l'infini (en pratique, au foyer d'une lentille convergente). Les rayons incidents sont par conséquent des ondes planes.
- L'observation est faite à l'infini (en pratique, dans le plan foyer d'une lentille).

Ce sont les conditions les plus souvent utilisées en diffraction (et les seules au programme prépa je crois).



Formule de Fraunhofer

Appliquons le principe de Huygens- Fresnel au problème de Fraunhofer pour calculer $s(\vec{u}_0, \vec{u})$, l'amplitude arrivant sur la pupille avec l'incidence \vec{u}_0 et repartant vers un point de l'écran repéré par le vecteur \vec{u} .

- ce qui repart est la superposition de tout ce qui a été crée par la pupille :

$$s(\vec{u}_0, \vec{u}) = \int_{\Sigma} ds(\vec{u}_0, P, \vec{u})$$

- Chaque surface dS centrée sur un point P émet une onde proportionnelle (KdS) à l'onde incidente en P ($s(\vec{u}_0, P)$) avec un facteur de transparence ($\tau(P)$). Cette onde doit ensuite se propager de P jusqu'en M ($e^{ik[PM]}$) :

$$ds(\vec{u}_0, P, \vec{u}) = K\tau(P)s(\vec{u}_0, P)e^{ik[PM]}dS$$

- L'onde arrivant en P a été émise en S avec l'amplitude s_0 et s'est propagée jusqu'en P .

$$s(\vec{u}_0, P) = s_0e^{ik[SP]}$$

On a donc

$$s(\vec{u}_0, \vec{u}) = \int_{\Sigma} K\tau(P)s_0e^{ik[SPM]}dS$$

On prend alors un point de référence O quelconque sur la pupille et on fait apparaître le chemin $[SOM]$ dans le calcul : $e^{ik[SPM]} = e^{ik([SPM]-[SOM])}e^{ik[SOM]}$ donc

$$s(\vec{u}_0, \vec{u}) = Ks_0e^{ik[SOM]} \int_{\Sigma} \tau(P)e^{ik([SPM]-[SOM])}dS$$

Il ne reste plus qu'à exprimer $e^{ik([SPM]-[SOM])}$. Par le principe de retour inverse, on trouve

$$[SPM] - [SOM] = (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}$$

NOTE Cette formule magique est piégeuse : il faut faire tout particulièrement attention aux signes devant les quantités $\vec{u} \cdot \vec{OP}$ et $\vec{u}_0 \cdot \vec{OP}$. Pour ne pas se tromper, rien ne vaut un cas particulier illustré par un dessin sur lequel on vérifiera le signe de $[SP] - [SO] = \pm \vec{u}_0 \cdot \vec{OP}$ et de $[PM] - [OM] = \pm \vec{u} \cdot \vec{OP}$. On se méfiera tout particulièrement des miroirs.

Finalement, on trouve la formule de Fraunhofer :

$$s(\vec{u}_0, \vec{u}) = Ks_0e^{ik[SOM]} \int_{\Sigma} \tau(P)e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}}dS$$

Exemple typique la fente rectangulaire

On se place dans le cadre précédent, avec une pupille éclairée sous incidence \vec{u}_0 et ayant pour transparence

$$\tau(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ et } -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'amplitude diffractée dans la direction \vec{u} vaut alors

$$\begin{aligned} s(\vec{u}_0, \vec{u}) &= K s_0 e^{ik[SOM]} \int_{\Sigma} \tau(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}} dS \\ &= K s_0 e^{ik[SOM]} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e^{i \frac{2\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S)x} e^{i \frac{2\pi}{\lambda f'} (y_M + y_S)y} \end{aligned}$$

car

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + f^2}} \begin{pmatrix} -x_s \\ -y_s \\ f' \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -x_s/f' \\ -y_s/f' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2 + f^2}} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ f' \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x_M/f' \\ y_M/f' \\ 1 \end{pmatrix}$$

et avec

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e^{i \frac{2\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S)x} &= \frac{1}{i \frac{2\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S)} \left[e^{i \frac{2\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S)x} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{\lambda f'}{2i\pi (x_M + x_S)} \left(e^{i \frac{2\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S) \frac{a}{2}} - e^{-i \frac{2\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S) \frac{a}{2}} \right) \\ &= \frac{\lambda f'}{\pi (x_M + x_S)} \sin \left(\frac{\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S) a \right) \\ &= a \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S) a \right) \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$s(\vec{u}_0, \vec{u}) = K s_0 a b e^{ik[SOM]} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S) a \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{\lambda f'} (y_M + y_S) b \right)$$

Le profil d'intensité est proportionnel au module carré de l'amplitude et on a donc

$$I(\vec{u}_0, \vec{u}) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda f'} (x_M + x_S) a \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi}{\lambda f'} (y_M + y_S) b \right)$$

Image à avoir : plus $\frac{a}{\lambda}$ est petit, plus la figure de diffraction est étalée (largeur proportionnelle à $\frac{\lambda}{a}$). A la limite $\frac{a}{\lambda} \rightarrow 0$, l'éclairement devient uniforme. A la limite $\frac{a}{\lambda} \rightarrow +\infty$, l'éclairement est exclusivement au centre (ie la lumière passe tout droit).

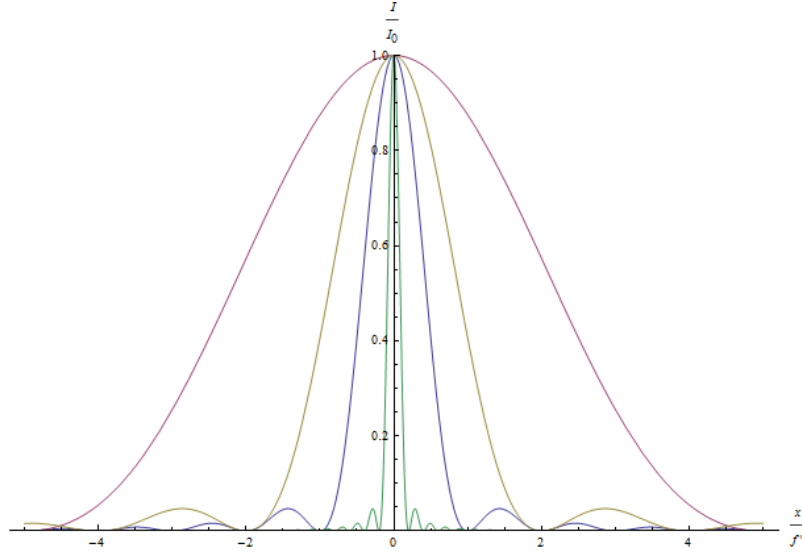


Figure de diffraction pour $\frac{\alpha}{\lambda} = 0.5, 0.2, 1, 5$ en incidence normale ($x_S = 0$)

2.2 Les réseaux

Un réseau est une grosse pupille de diffraction constitué d'un ensemble de pupilles de diffraction identiques. Chacune des pupilles est éclairée par la source et rayonne donc une onde, comme l'explique le principe de Huygens Fresnel. Toutes les ondes sont cohérentes entre elles ; il faut donc additionner les *amplitudes* émises par chacune de pupilles du réseau. On se placera pour la suite dans les conditions de Fraunhofer.

Mathématiquement, cette idée se traduit simplement : soit $\mathcal{P} = \{\text{pupille}\}$ l'ensemble des pupilles, toutes identiques. L'amplitude totale émise dans la direction \vec{u} s'écrit

$$s_{tot}(\vec{u}_0, \vec{u}) = \sum_{n \in \mathcal{P}} s_n(\vec{u}_0, \vec{u}),$$

où $s_n(\vec{u}_0, \vec{u})$ est l'amplitude diffractée dans la direction \vec{u} par la pupille n , de centre O_n , de transparence τ_n , éclairée sous incidence \vec{u}_0 . On a montré au paragraphe précédent que

$$s_n(\vec{u}_0, \vec{u}) = K s_0 e^{ik[SO_n M]} \int_{\Sigma} \tau_n(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_n P}} dS$$

Or toutes les pupilles sont identiques et sont simplement translatées les unes par rapport aux autres ; on a donc

$$\int_{\Sigma} \tau_n(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_n P}} dS = \int_{\Sigma} \tau_{n'}(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_{n'} P}} dS \quad \forall (n, n').$$

En utilisant cette propriété, on obtient

$$\begin{aligned} s_{tot}(\vec{u}_0, \vec{u}) &= \sum_{n \in \mathcal{P}} K s_0 e^{ik[SO_n M]} \int_{\Sigma} \tau_n(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_n P}} dS \\ &= K s_0 \left(\int_{\Sigma} \tau_0(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_0 P}} dS \right) \sum_{n \in \mathcal{P}} e^{ik[SO_n M]} \end{aligned}$$

On additionne donc plein de fois la même amplitude (amplitude d'une pupille seule) déphasée d'un facteur qui dépend de la position de la pupille (au travers de $[SO_n M]$). Comme précédemment, on fixe un point O_0 de référence et on compte les déphasages par rapport à ce point :

$$\begin{aligned} s_{tot}(\vec{u}_0, \vec{u}) &= K s_0 \left(\int_{\Sigma} \tau_0(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_0 P}} dS \right) e^{ik[SO_0 M]} \sum_{n \in \mathcal{P}} e^{ik([SO_n M] - [SO_0 M])} \\ &= K s_0 e^{ik[SO_0 M]} \left(\int_{\Sigma} \tau_0(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_0 P}} dS \right) \sum_{n \in \mathcal{P}} e^{ik\delta_{O_n, O_0}} \\ &= K s_0 e^{ik[SO_0 M]} \left(\int_{\Sigma} \tau_0(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_0 P}} dS \right) \sum_{n \in \mathcal{P}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{O_0 O_n}} \end{aligned}$$

Si les pupilles sont régulièrement alignées (typiquement $O_n = O_0 + nd\vec{u}_y$), la somme devient

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathcal{P}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{O}_0 \vec{O}_n} &= \sum_{n \in \mathcal{P}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (y_M + y_S) n d} \\
 &= \sum_{n \in \mathcal{P}} \left(e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (y_M + y_S) d} \right)^n \\
 &= \frac{1 - e^{i \frac{2\pi}{\lambda} N (y_M + y_S) d}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (y_M + y_S) d}} \\
 &= \frac{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} N (y_M + y_S) d \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} (y_M + y_S) d \right)} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{N-1}{2} (y_M + y_S) d}
 \end{aligned}$$

et on en déduit l'amplitude et l'intensité diffractées (la phase φ_0 est sans importance, car elle disparaît quand on prend le module carré)

$$\begin{aligned}
 s_{tot}(\vec{u}_0, \vec{u}) &= K s_0 e^{i\varphi_0} \left(\int_{\Sigma} \tau_0(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{O}_0 \vec{P}} dS \right) \frac{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} N (y_M + y_S) d \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{\lambda} (y_M + y_S) d \right)} \\
 I_{tot}(\vec{u}_0, \vec{u}) &= I_0 \left(\int_{\Sigma} \tau_0(P) e^{ik(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{O}_0 \vec{P}} dS \right)^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} N (y_M + y_S) d \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} (y_M + y_S) d \right)}
 \end{aligned}$$

Images à avoir :

- Plus $\frac{d}{\lambda}$ est petit, plus les pics sont espacés car la distance entre 2 pics est donnée par la période du dénominateur.
Plus $\frac{d}{a}$ est grand, plus on voit de pics (on voit à peu près $\frac{d}{a}$ pics)

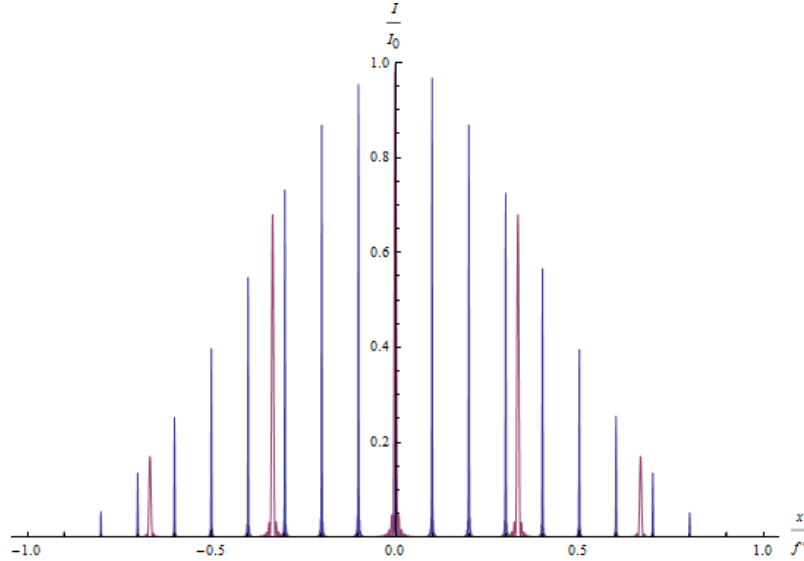


Figure de diffraction pour $\frac{d}{a} = 3, 10$, $\frac{d}{\lambda} = 1$ et $N = 10$ en incidence normale ($x_S = 0$)

- Plus N est grand, plus les pics sont hauts (proportionnels à N^2) et fins (largeur proportionnelle à $\frac{1}{N}$)

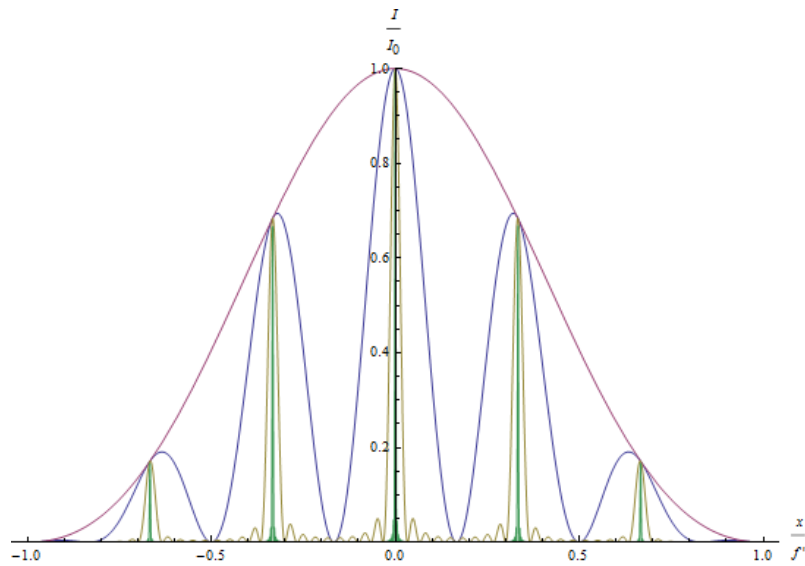


Figure de diffraction pour $\frac{d}{a} = 3$, $\frac{d}{\lambda} = 1$ et $N = 1, 2, 10, 100$ en incidence normale ($x_S = 0$). Attention, la hauteur est normalisée ! (la courbe verte est normalement 10000 fois plus haute que la courbe rouge).

Formule des réseaux

La formule des réseaux est extrêmement simple : elle revient simplement à dire que pour avoir une interférence constructive à l'infini, il suffit que deux ondes issues de deux pupilles consécutives soient en phase. En effet, dans ce cas, toutes les ondes sont en phases (celle issue de n avec celle issue de $n + 1$, elle même avec elle issue de $n + 2$ etc.). Mathématiquement, avec $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \delta_{O_n, O_{n+1}} &= p\lambda \\
 \Leftrightarrow (\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{O_n O_{n+1}} &= p\lambda \\
 \Leftrightarrow (\sin\alpha - \sin\alpha_0) a &= p\lambda \\
 \Leftrightarrow \sin\alpha - \sin\alpha_0 &= p\frac{\lambda}{a}
 \end{aligned}$$