Effet Zeeman

1 Modèle de l'électron élastiquement lié.

On considère un électron décrivant autour d'un noyau une orbite circulaire de rayon a à la vitesse angulaire ω_0.
En l'absence d'autres effets, cette orbite ne peut être un équilibre que si, dans le référentiel de l'électron, les forces se compensent. On doit donc avoir :

$$\overrightarrow{F_{coulomb}} + \overrightarrow{F_{entrainement}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{a^2} + am\omega_0^2 = 0, \text{ soit}$$

$$m\omega_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{a^3}.$$

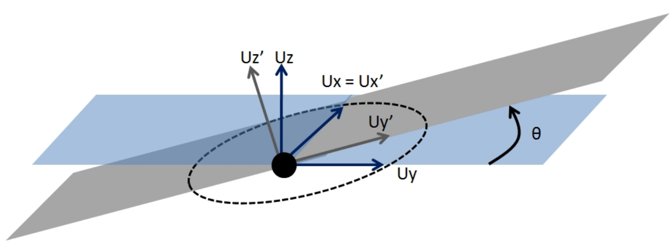
Si on déplace l'électron de son orbite, il est ramené à cette position d'équilibre car

$$\overrightarrow{F_{coulomb}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{\left|a\overrightarrow{u_r}+\overrightarrow{dr}\right|^3}\left(a\overrightarrow{u_r}+\overrightarrow{dr}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{a^2}\overrightarrow{u_r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{a^3}\overrightarrow{dr} + O\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = \overrightarrow{F_{coulomb,eq}} - m\omega_0^2\overrightarrow{r}$$

En se plaçant dans le référentiel en rotation, on peut donc considérer que l'électron est uniquement soumis à une force de rappel élastique $\overrightarrow{R_{rap}} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r}$. C'est le modèle de l'électron élastiquement lié.

2 Effet Zeeman



On considère, dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, un électron effectuant une orbite circulaire de rayon a dans le plan $\overrightarrow{u_x'}$, $\overrightarrow{u_y'}$ à la vitesse angulaire ω_0. A l'instant $t = 0$, l'électron placé en $-a\overrightarrow{u_y'}$ et sa vitesse vaut $a\omega_0\overrightarrow{u_x'}$.
On applique un champ magnétique constant $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$.

2.1 Démonstration cinétique

Dans le cadre de l'approximation de Born - Oppenheimer, le noyau est supposé immobile car 10^4 fois plus massif que l'électron. Le référentiel lié au noyau est donc supposé galiléen et c'est celui qu'on utilisera pour l'ensemble du problème.
Considérons, dans le repère R, les forces appliquées sur l'électron :

$$\overrightarrow{F_{rappel}} = -m\omega_0^2 \vec{r} = -m\omega_0^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{F_{mag}} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -eB_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'application du principe fondamental de la dynamique donne alors

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - eB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -m\omega_0^2 y + eB_0\dot{x} \\ m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z \end{cases}$$

Equation du mouvement suivant z

La résolution du mouvement suivant z est alors facile :
$z(t) = A_z cos\left(\omega_0 t\right) + B_z sin\left(\omega_0 t\right)$, et on obtient avec les conditions initiales

$$\boxed{z(t) = -asin\theta cos\left(\omega_0 t\right)}$$

Equation du mouvement suivant x et y

On pose $U = x + iy$. Le système précédent se met alors sous la forme

$$\ddot{U} = -\omega_0^2 U + i\frac{eB_0}{m}\dot{U}$$

La résolution de cette équation demande de calculer le discrimant du polynome caratéristique :

$$\Delta = -\left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2 = -4\left(\Omega^2 + \omega_0^2\right),$$

avec $\Omega = \frac{eB_0}{2m}$. En considérant $\Omega \ll \omega_0$, on obtient les solutions

$$U = A_U e^{i(\Omega+\omega_0)t} + B_U e^{i(\Omega-\omega_0)t}$$

Les conditions initiales donnent alors

$$\begin{cases} A_U + B_U = -iacos\theta \\ i\left(\Omega + \omega_0\right) A_U + i\left(\Omega - \omega_0\right) B_U = a\omega_0 \end{cases}$$

La résolution de système de Cramer donne les expressions de A_U et de B_U :

$$\begin{cases} A_U = i\frac{a}{2}\left(cos\theta\frac{\Omega}{\omega_0} - cos\theta - 1\right) \simeq -i\frac{a}{2}\left(1 + cos\theta\right) \\ B_U = i\frac{a}{2}\left(-cos\theta\frac{\Omega}{\omega_0} - cos\theta + 1\right) \simeq i\frac{a}{2}\left(1 - cos\theta\right) \end{cases}$$

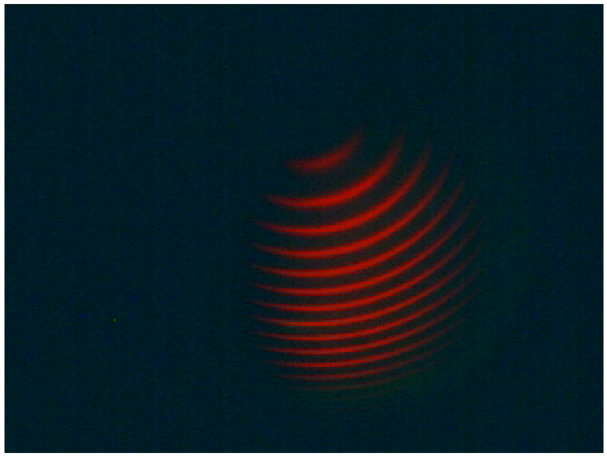
et on en déduit les expressions de $x(t)$ et $y(t)$:

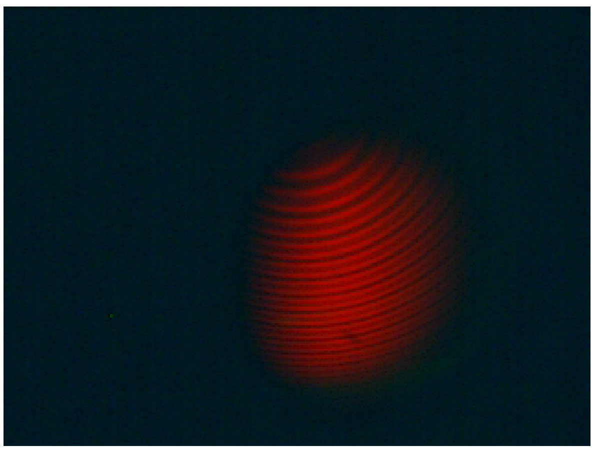
$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = \frac{a}{2}\left(\left(1 + cos\theta\right) sin\left(\left(\Omega + \omega_0\right) t\right) - \left(1 - cos\theta\right) sin\left(\left(\Omega - \omega_0\right) t\right)\right) \\ y(t) = \frac{a}{2}\left(-\left(1 + cos\theta\right) cos\left(\left(\Omega + \omega_0\right) t\right) + \left(1 - cos\theta\right) cos\left(\left(\Omega - \omega_0\right) t\right)\right) \end{array}}$$

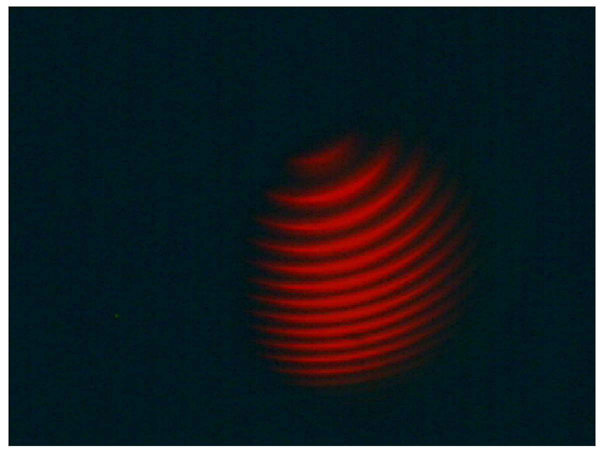
Interprétation spectroscopique

Une particule oscillant à une certaine pulsation émet une onde électromagnétique à cette même pulsation. Si le niveau d'énergie $\hbar\omega_0$ donnait à voir une seule longueur d'onde à $\frac{2\pi}{\omega_0}c$ en abscence de champ magnétique, cette même longueur d'onde se détriple ($\omega_0 \to \omega_0$, $\omega_0 - \Omega$, $\omega_0 + \Omega$).

De plus, l'onde émise à ω_0 est polarisée rectilignement (car le mouvement émettant cette onde est unidimensionnel suivant z) tandis que les ondes à $\omega_0 \pm \Omega$ sont respectivement circulaire droite et circulaire gauche.







2.2 Démonstration énergétique

De par son mouvement, l'électron forme un courant $i = \pm e\frac{\omega_0}{2\pi}$, donc un dipole magnétique $\overrightarrow{M} = i\overrightarrow{S} = -e\frac{\omega_0}{2\pi}\pi a^2\overrightarrow{u_z} = -\frac{1}{2}e\omega_0 a^2\overrightarrow{u_z}$.

On peut relier cette expression à celle du moment cinétique $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p} = ma^2\omega_0\overrightarrow{u_z}$ par un coefficient appelé rapport gyromagnétique γ :

$$\overrightarrow{M} = \gamma\overrightarrow{L} \text{ avec } \gamma = -\frac{e}{2m}$$

Or un dipole, plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{U_z}$, ce dipole acquiert une énergie $E_p = -\overrightarrow{M}.\overrightarrow{B} = \frac{eB_0}{2m}\overrightarrow{L}.\overrightarrow{U_z} = \frac{eB_0}{2m}L_z$.

En considérant le premier état excité de l'électron $1p$, la quantification du moment cinétique donne trois valeurs possibles à $L_z = m\hbar$ avec $m = -1$, 0 ou 1. On en déduit que l'énergie E_0 est détriplée en trois niveaux : $E_0 - \frac{eB_0}{2m}\hbar$, E_0 et $E_0 + \frac{eB_0}{2m}\hbar$.