

L'effet Cerenkov

1 Vitesse minimale : lien avec la superfluidité

Un raisonnement (classique) simple permet de mettre en évidence la nécessité d'une vitesse superluminique dans le rayonnement Cerenkov.

Considérons une particule chargée de masse M dotée d'une vitesse \vec{v} . On s'intéresse à l'émission d'un photon d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $\frac{\hbar\omega}{c}\vec{u}$. Après l'émission, la particule a toujours la même masse mais une vitesse \vec{v}' . La conservation de l'énergie et de l'impulsion imposent

$$\begin{aligned}M\vec{v} &= M\vec{v}' + \frac{\hbar\omega}{c}\vec{u} \\ \frac{1}{2}Mv^2 &= \frac{1}{2}Mv'^2 + \hbar\omega\end{aligned}$$

Avec $\vec{v}' = \vec{v} - \frac{\hbar\omega}{Mc}\vec{u}$ et en considérant l'énergie du photon comme petite devant celle de la particule, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Mv^2 &= \frac{1}{2}M\left(\vec{v} - \frac{\hbar\omega}{Mc}\vec{u}\right)^2 + \hbar\omega \\ &= \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{\hbar\omega}{c}\vec{v}\cdot\vec{u} + \frac{1}{2}\frac{\hbar^2\omega^2}{Mc^2} + \hbar\omega \\ &\simeq \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{\hbar\omega}{c}\vec{v}\cdot\vec{u} + \hbar\omega\end{aligned}$$

d'où

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = c$$

ce qui n'est possible que si

$$v > c$$

Ce raisonnement est analogue au critère de superfluidité décrit par Landau.

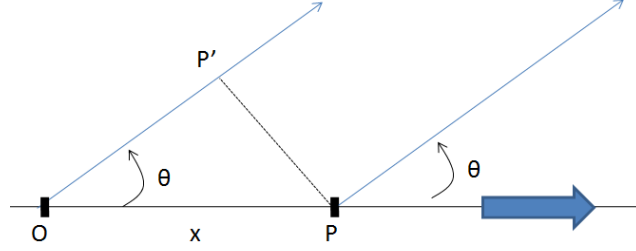
2 Angle d'ouverture du cône

Un électron se déplace le long de l'axe \vec{u}_x . A son passage, il polarise le milieu qui, en se relaxant, émet une onde électromagnétique. On considère les hypothèses suivantes :

- L'électron se déplace toujours dans la même direction (pas de diffusion sur les molécules du milieu) et à vitesse constante (on ne prend pas en compte la perte d'énergie par rayonnement).
- On considère qu'une trace de longueur $L \gg \lambda$ contribue au rayonnement.
- Quitte à considérer une transformation de Fourier, on considère l'onde émise en chaque point comme une onde harmonique sphérique de pulsation ω . On négligera les diminutions d'amplitude dues à la distance dans la suite.
- Chaque point commence à rayonner avec une phase nulle au moment où l'électron passe en ce point.

Première approche :

On se place dans les conditions de Fraunhofer (ie observateur M à l'infini) pour déterminer l'amplitude rayonnée dans la direction θ . Pour ce faire, il nous faut additionner les contributions de chaque point P de la trace.



Prenons un point O de référence au centre de la trace. Quitte à changer l'origine des temps, on peut considérer que l'élément de trace en O émet une onde $s_0 dx e^{-i\omega t}$. Sa contribution au point M s'écrit donc $s_0 dx e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[OM]}$. On néglige ici la diminution d'amplitude due à la propagation des ondes sphériques, car dans les conditions de Fraunhofer le point M est situé à une distance $\rho \gg L$ de la trace et la diminution est la même pour chaque point émetteur.

L'élément de surface situé au point P , à une distance x du point O , commence à rayonner à l'instant $\frac{x}{v}$. Il émet donc une onde $s_0 dx e^{-i\omega(t-\frac{x}{v})}$ et sa contribution au point M peut s'écrire $s_0 dx e^{-i\omega(t-\frac{x}{v})} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[PM]}$.

En sommant toutes les contributions, on obtient l'amplitude rayonnée dans la direction θ :

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \int_{-L/2}^{L/2} s_0 dx e^{-i\omega(t-\frac{x}{v})} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[PM]} \\ &= s_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[OM]} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-i\frac{2\pi c}{\lambda v} \frac{x}{v}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \delta} \end{aligned}$$

avec

$$\delta = [PM] - [OM] = [P'O] = n x \cos \theta$$

en utilisant la loi du retour inverse et le théorème de Malus.

On en déduit

$$\begin{aligned} S(\theta) &= s_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[OM]} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{i\frac{2\pi}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v}) x} \\ &= s_0 e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[OM]} \frac{1}{i\frac{2\pi}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v})} \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v}) \frac{L}{2}} - e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v}) \frac{L}{2}} \right) \\ &= s_0 \frac{L}{2} e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[OM]} \text{sinc} \left(\frac{\pi L}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v}) \right) \end{aligned}$$

où on note $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. En considérant l'intensité comme la valeur moyenne temporelle du carré du module de l'amplitude sur un grand nombre de période et en notant $I_0 = (s_0 L)^2$ l'intensité émise par l'ensemble de la trace, on trouve

$$I(\theta) = \frac{I_0}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi L}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v}) \right)$$

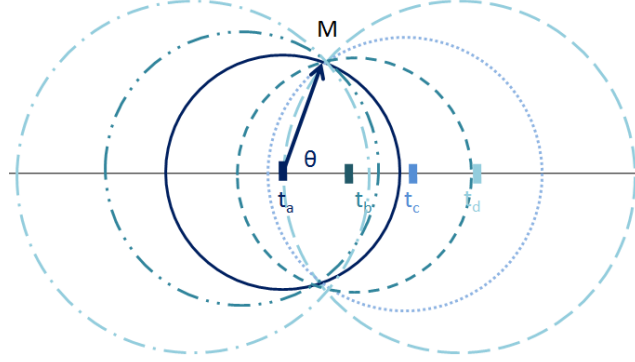
Avec $L \gg \lambda$, on peut assimiler la fonction $\text{sinc}^2 \left(\frac{\pi L}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v}) \right) = \delta \left(\frac{\pi L}{\lambda} (n \cos \theta - \frac{c}{v}) \right)$, où δ est la fonction de Dirac. On obtient ainsi la condition Cerenkov :

$$I(\theta) \neq 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{\beta n}$$

Seconde approche

On peut mener un second type de raisonnement, plus qualitatif, pour comprendre la valeur de l'ouverture du cône.

En tout point M de l'espace se superposent les ondes issues de chaque point x de la trace. Toutes ces ondes présentent des phases $\varphi(M, x)$ différentes, qui dépendent à la fois de leur instant d'émission et de leur propagation jusqu'au point M .



De manière générale, pour chaque point x contribuant au signal par une phase $\varphi(M, x)$, on peut trouver un point x' qui fournit un signal en opposition de phase au premier tant et si bien que leur somme s'annule. Il existe pourtant un point x_0 tel que tous les points autour de x_0 contribuent avec la même phase au signal et s'additionnent donc constructivement. Ce point est caractérisé par $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{x_0} = 0$. Or, en prenant l'origine des phases à l'aplomb du point M (comme sur la figure précédente), on a

$$\varphi(M, x) = +\omega \frac{x}{v} - \frac{2\pi}{\lambda} n \sqrt{x^2 + \rho^2} = \frac{n\omega}{c} \left(\frac{x}{\beta n} - \sqrt{x^2 + \rho^2} \right)$$

La condition $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{x_0} = 0$ se traduit alors par

$$\frac{1}{\beta n} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \rho^2}} = \cos \theta_0$$

3 Spectre de la radiation Cerenkov

Pour exprimer le spectre du rayonnement, il faut se plonger dans les calculs dans champs électromagnétiques.

Equations de Maxwell dans un milieu diélectrique

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le milieu dans lequel se déplace l'électron est supposé diélectrique ; la présence d'un champ \vec{E} entraîne donc l'apparition d'une densité de polarisation \vec{P} . Cette polarisation entraîne l'apparition d'une densité de charge de polarisation $\rho_P = -\text{div} \vec{P}$ et d'un courant de polarisation $\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

En supposant le milieu linéaire ($\vec{P} = \epsilon_0 [\chi] \vec{E}$), isotrope et homogène ($[\chi(\vec{r})] = \chi^{(1)} \mathbb{I}_d$), on peut définir l'indice n du milieu par la relation

$$\chi^{(1)} = n^2 - 1.$$

Les équations de Maxwell se réécrivent alors

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (n^2 \epsilon_0 \vec{E}) &= \rho_l & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_l + \mu_0 \frac{\partial (n^2 \epsilon_0 \vec{E})}{\partial t},\end{aligned}$$

où ρ_l et \vec{j}_l sont respectivement les densités volumiques de charges libres et les courants de charges libres.

Decomposition en mode de Fourier

Considérons la décomposition temporelle des champs en modes de Fourier :

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_\omega(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}_\omega(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

En utilisant la linéarité des équations de Maxwell, on peut les réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (n^2 \epsilon_0 \vec{E}_\omega) &= \rho_{l,\omega} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\omega &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\omega &= -i\omega \vec{B}_\omega & \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_\omega &= \mu_0 \vec{j}_{l,\omega} + i\omega \frac{n^2}{c^2} \vec{E}_\omega.\end{aligned}$$

Equations des potentiels

On tire des équations de Maxwell flux et de Maxwell Faraday l'existence d'un potentiel vecteur \vec{A} et d'un potentiel scalaire V tels que

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\omega = \vec{B}_\omega \quad \vec{E}_\omega = -i\omega \vec{A}_\omega - \vec{\nabla} V_\omega$$

On peut fixer une condition de jauge sur ces potentiels :

$$\frac{i\omega n^2}{c^2} V_\omega + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega = 0$$

et on obtient alors une nouvelle formulation des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\omega &= \vec{B}_\omega & \vec{E}_\omega &= -i\omega \vec{A}_\omega - \vec{\nabla} V_\omega \\ \Delta \vec{A}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{A}_\omega &= -\frac{\vec{j}_{l,\omega}}{\epsilon_0 n^2} & \Delta V_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} V_\omega &= -\frac{\rho_{l,\omega}}{\epsilon_0 n^2}\end{aligned}$$

Application au cas d'une particule libre en mouvement

Dans la configuration de l'effet Cerenkov, on considère les sources suivantes :

$$\rho_l = 0 \quad \vec{j}_l = ev_0 \delta(x - vt) \delta(y) \delta(z) \vec{u}_x.$$

On en déduit l'expression de $\vec{j}_{l,\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{j}_l(\vec{x}, t) e^{-i\omega t} dt = ev_0 \delta(y) \delta(z) e^{-i\frac{\omega x}{v_0}} \vec{u}_x$. En utilisant les coordonnées polaires (r, θ, x) , on obtient

$$\vec{j}_{l,\omega} = \frac{ev_0}{\rho} \delta(\rho) e^{-i\frac{\omega z}{v_0}} \vec{u}_x$$

Compte tenu des caractéristiques du problème, on peut chercher \vec{A}_ω sous la forme $\vec{A}_\omega = u(\rho) e^{-i\frac{\omega z}{v_0}} \vec{u}_x$. On obtient ainsi l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\omega^2}{v_0^2} (n^2 \beta^2 - 1) u = \frac{ev_0}{\epsilon_0 \rho} \delta(\rho)$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation de Bessel avec un pôle en $\rho = 0$. La résolution de cette équation n'est pas faite ici de façon rigoureuse, j'ai repris les résultats présentés dans [1]

Si $\beta n < 1$

Alors u tend vers 0 quand $\rho \rightarrow +\infty$: le champ ne peut pas se propager.

Si $\beta n > 1$

Alors, dans l'approximation $\rho \gg \frac{\omega}{c} (\beta n - 1)$, on peut considérer une onde cylindrique propageante, telle que

$$A_{\omega,x} = -\frac{\mu_0 e}{c\sqrt{2\pi\frac{\omega}{c}(\beta n-1)\rho}} \exp\left[i\omega\left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{3i\pi}{4}\right]$$

Dans ce cas, on peut obtenir l'expression des champs. En posant $s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 n^2 - 1)$, on obtient

$$B_\theta = \mu_0 \frac{e}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \int \sqrt{s} \cos\left(\omega\left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) d\omega$$

$$E_\rho = \mu_0 e \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \int \frac{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}{\beta^2 n^2 \sqrt{s}} \cos\left(\omega\left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \omega d\omega$$

$$E_z = \mu_0 e \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \frac{1}{\sqrt{s}} \cos\left(\omega\left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \omega d\omega,$$

où l'intégrale porte sur les ω tels que $\beta n(\omega) > 1$

Spectre

L'énergie rayonnée moyenne au travers d'un cylindre Σ de rayon ρ et de longueur l par unité de temps correspond à la moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting au travers de cette surface, ie

$$\frac{dW}{dt} = \left\langle -\int_{lat} \frac{\vec{B} \wedge \vec{E}}{\mu_0} \cdot \vec{u}_\rho dS \right\rangle_T = \int_{lat} \frac{\langle E_z B_\theta \rangle_T}{\mu_0} \rho d\theta dl,$$

car le flux du vecteur de Poynting au travers d'un des deux couvercles du cylindre est l'inverse du flux au travers de l'autre. On peut donc exprimer l'énergie rayonnée par élément dl de la trace :

$$\frac{dW}{dl dt} = \frac{2\pi\rho}{\mu_0} \frac{1}{T} \int_T E_z B_\theta dt$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{1}{T} \int_T \left(\int \cos\left(\omega' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) d\omega' \int \cos\left(\omega'' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \omega'' d\omega'' \right) dt \\ = \frac{1}{T} \int_T \left(\int \int \cos\left(\omega' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega'' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \omega'' d\omega'' d\omega' \right) dt \\ = \int \int \left[\frac{1}{T} \int_T \left(\cos\left(\omega' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega'' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \right) dt \right] \omega'' d\omega'' d\omega' \end{aligned}$$

et $\frac{1}{T} \int \left(\cos\left(\omega' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega'' \left(t - n\frac{z\cos\theta_0 + \rho\sin\theta_0}{c}\right) + \frac{\pi}{4}\right) \right) dt = \frac{1}{2} \delta_{\omega', \omega''}$. On en déduit donc

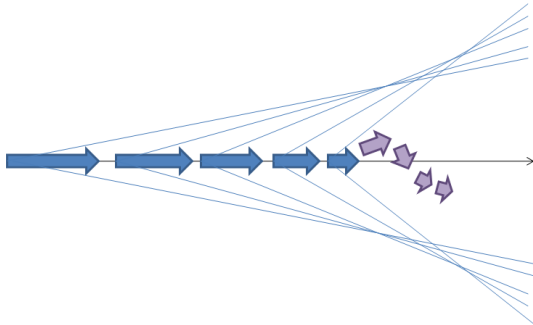
$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T E_z B_\theta dt &= \frac{1}{2} \mu_0 e \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \frac{1}{\sqrt{s}} \mu_0 \frac{e}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sqrt{s} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) \omega d\omega \\ &= \frac{\mu_0^2 e^2}{\pi\rho c} \int_{\beta n(\omega) > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) \omega d\omega, \end{aligned}$$

d'où l'expression du spectre

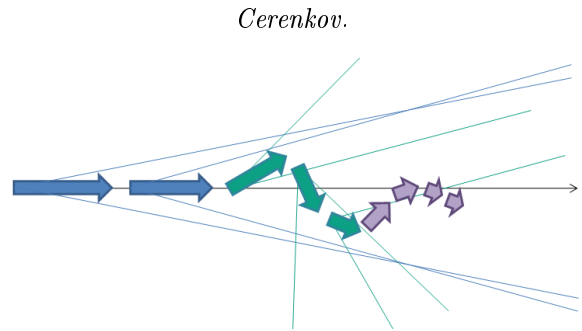
$$\frac{dW}{dl dt} = \frac{2\mu_0 e^2}{c} \int_{\beta n(\omega) > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) \omega d\omega$$

4 Signal électronique et muonique

Dans la cuve de SK, les muons laissent un cône plus large que les électrons. On peut peut être interpréter cet effet par la différence de masse entre les deux leptons : plus lourd, le muon est moins susceptible d'être diffusé par le milieu que l'électron. Il perd donc de l'énergie tout en gardant la même direction ; hors plus son impulsion diminue, plus l'angle du cône s'ouvre et la superposition de plusieurs cônes de même axe donne à voir un anneau épais (flèches bleues). Lorsque son impulsion est trop basse, il n'émet plus de rayonnement Cerenkov (flèches violettes). A l'inverse, les électrons subissent rapidement des diffusions multiples ; seul le début de la trace donne une superposition de cônes d'ouverture croissante (flèches bleues) mais rapidement la diffusion multiple entraine la formation de cônes dans d'autres directions, trop faibles pour être détectés (flèches vertes) avant que l'impulsion de l'électron devienne trop basse pour qu'il puisse rayonner (flèches violettes).



Trajectoire d'un muon. Les flèches épaissent indiquent sa vitesse, les traits fins la direction de la radiation



Trajectoire d'un électron. Les flèches épaissent indiquent sa vitesse, les traits fins la direction de la radiation Cerenkov.

RÉFÉRENCE

- [1] Jelley, J.V., *The Cerenkov radiation and its application*, 1958.