# Description (semi)classique du refroidissement d'atomes

L'objectif de ce document est de présenter les éléments clés des techniques de refroidissements d'atomes utilisées expérimentalement.

Les calculs n'utilisent que des outils classiques : mécanique du point, équations de Maxwell, milieux diélectriques.

## Contents



# 1 Modélisation de l'atome

Le but de cette première partie est d'établir un modèle classique décrivant un atome. Il s'agit essentiellement d'une démonstration formelle du modèle de l'atome élastiquement lié.

## 1.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

**Orbite en l'abscence de perturbations**

Considérons un électron suivant une orbite circulaire de rayon $a$ autour d'un noyau de numéro atomique $Z$.

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}.$$

De plus, le théorème du moment cinétique impose

$$\overrightarrow{L} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{\text{csté}}$$

Pour un mouvement circulaire, on en déduit $\dot{\theta} = \text{cste}$ ; l'accélération s'écrit alors $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\frac{v^2}{a}\overrightarrow{u_r} = -\frac{L^2}{m^2a^3}\overrightarrow{u_r}$. On en déduit :

$$\frac{L^2}{ma^3} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}$$

**En présence d'une perturbation**

On suppose qu'une perturbation fasse varier le rayon de l'orbite $a \to r(t) = a + \delta r(t)$ tout en conservant le moment cinétique.

On se place dans le référentiel en rotation autour du noyau à la vitesse angulaire $\Omega = \frac{L}{mr^2}$.

Dans ce référentiel, le principe fondamental de la dynamique projeté suivant $\overrightarrow{u_r}$ donne

$$\begin{array}{rcl} m\ddot{r} & = & -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} + m\Omega^2 r \\ \Rightarrow \quad m\ddot{\delta r} & = & -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2\left(1+\frac{\delta r}{a}\right)^2} + m\frac{L^2}{m^2a^3\left(1+\frac{\delta r}{a}\right)^3} \\ & = & -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2}\left(1-2\frac{\delta r}{a}\right) + \frac{L^2}{ma^3}\left(1-3\frac{\delta r}{a}\right) \\ & = & -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^3}\delta r \end{array}$$

L'électron est donc rappelé vers sa position d'équilibre avec une force de rappel $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{\delta r}$, où $k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^3}$

*Remarque* *suivant $\overrightarrow{u_\theta}$, deux forces se compensent :*

- *La force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{F_{ie}} = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{u_r}) = -2m\Omega\dot{r}\overrightarrow{u_\theta}$*
- *La force d'interie d'entrainement due aux variations de $\Omega$ : $-m\frac{d\overrightarrow{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{OM} = -m\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\right)\overrightarrow{u_z}\wedge(r\overrightarrow{u_r}) = 2\frac{L}{r^2}\dot{r} = 2m\dot{r}\Omega\overrightarrow{u_\theta}$.*

Dans la suite, on se placera dans le référentiel tournant et on tiendra compte des forces d'inertie sous l'effet d'une force de rappel $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{r} = -m\omega_A^2\overrightarrow{r}$, où $\overrightarrow{r}$ est la position de l'électron par rapport à sa position d'équilibre.

**Lien avec la mécanique quantique**

On peut faire ici un lien avec le modèle d'un atome à deux niveaux (niveau fondamental et niveau excité) dont la différence d'énergie est donnée par

$$E_e - E_g = \hbar\omega_A$$

On retrouve ici la formule d'Einstein : lorsqu'un atome passe d'un état à un autre, il absorbe (ou émet) un photon dont la fréquence est donnée par la différence d'énergie de la transition

### 1.2 Prise en compte d'une force d'amortissement

Pour tenir compte du rayonnement de freinage de l'électron (une particule chargée suivant une trajectoire accélérée en présence d'un champ électrique émet un rayonnement appelé *Brehmstrallung*), on rajoute un terme dissipatif de la forme

$$\overrightarrow{f} = -m\Gamma\overrightarrow{v}$$

**Lien avec la mécanique quantique**

$$\Gamma = \frac{q^2\omega_A^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

## 2 Interaction lumière-matière

On cherche à présent à décrire le comportement d'un ensemble d'atomes soumis à un rayonnement électromagnétique

## 2.1 Susceptibilité diélectrique

On considère que les électrons restent attachés aux noyaux. La présence d'un champ électrique va donc engendrer un déplacement du barycentre des charges négatives et faire apparaitre une densité de polarisation. On peut estimer cet effet en appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble des Z charges négatives d'un atome (dans l'hypothèse de Born - Oppenheimer, on considérera les charges positives immobiles).

$$Zm_e \frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -Zm\omega_A^2\overrightarrow{r} - Zm\Gamma\overrightarrow{v} + Z\left(-e\right)\overrightarrow{E}$$

On considère que le rayonnement électromagnétique peut être écrit sous la forme

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r},t)\right) = \mathrm{Re}\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r})\exp\left(i\varphi(\overrightarrow{r}) - i\omega t\right)\right)$$

(par linéarité des équations utilisées, toute onde peut être décomposée par transformation de Fourier en une superposition d'ondes de la forme ci dessus).

En utilisant la notation complexe, on a alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r} &= \mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{r}}\right) \\
\underline{\overrightarrow{r}} &= -\epsilon_0 \tfrac{e}{m\epsilon_0}\tfrac{1}{\omega_A^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}
\end{aligned}$$

Dans un volume $d\tau$, on trouve un nombre $nd\tau$ d'atomes dont le barycentre est déplacé de la quantité calculée précédemment.

La polarsation de ce volume vaut donc

$$\begin{aligned}
d\underline{\overrightarrow{p}} &= nd\tau \times e \times (-\underline{\overrightarrow{r}}) \\
&= \underline{\overrightarrow{P}}d\tau \\
&= \epsilon_0\chi\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}d\tau
\end{aligned}$$

où on définit la susceptibilité diélectrique $\chi$, dont on peut déterminer l'expression analytique

$$\begin{aligned}
\chi' &= \mathrm{Re}\chi \\
&= \frac{ne^2}{m\epsilon_0}\frac{\omega_A^2 - \omega^2}{\left(\omega_A^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \\
&= \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega_A^2}\frac{1 - \omega^2/\omega_A^2}{\left(1 - \omega^2/\omega_A^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2/\omega_A^4} \\
&\simeq \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega_A^2}\frac{-2\delta/\omega_A}{4\delta^2/\omega_A^2 + \Gamma^2/\omega_A^2} \\
&= -\frac{ne^2}{2m\epsilon_0\omega_A}\frac{\delta}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} \\
&= -\frac{\chi_0\omega_A}{2}\frac{\omega_A\delta}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi'' &= \mathrm{Im}\chi \\
&= \frac{ne^2}{m\epsilon_0}\frac{\omega\Gamma}{\left(\omega_A^2 - \omega^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2} \\
&= \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega_A^2}\frac{\omega\Gamma/\omega_A^2}{\left(1 - \omega^2/\omega_A^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2/\omega_A^4} \\
&\simeq \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega_A^2}\frac{\Gamma/\omega_A}{4\delta^2/\omega_A^2 + \Gamma^2/\omega_A^2} \\
&= \frac{ne^2}{2m\epsilon_0\omega_A}\frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} \\
&= \frac{\chi_0\omega_A}{2}\frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2}
\end{aligned}$$

où on a développé les expressions au premier ordre en $\delta = \omega - \omega_A$ autour de la résonnance et noté $\chi_0 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0\omega_A^2}$.

## 2.2 Expression de la force subie par un atome soumis à un rayonnement

On veut exprimer la force subie par un atome soumis à un rayonnement. On tient compte pour cela des deux termes de la force de Lorentz appliquée au noyau et au cortège électronique.

$$\overrightarrow{f} = Ze\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r_N},t) + Ze\dot{\overrightarrow{r_N}} \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r_N},t) - Ze\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r_e},t) - Ze\dot{\overrightarrow{r_e}} \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r_e},t)$$

Dans l'approximation de Born Oppenheimer, on considère que le centre de masse du système est confondu avec celui du noyau. Par conséquent, on peut prendre $\overrightarrow{r_N} = \dot{\overrightarrow{r_N}} = 0$ et $\overrightarrow{r_e} = \overrightarrow{r}$ et on trouve, avec un développement limité au premier ordre en $\overrightarrow{r}$,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{f} &= Ze\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0},t) - Ze\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r_e},t) - Ze\dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r_e},t) \\
&\simeq Ze\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0},t) - Ze\left(\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0},t) + \left(\overrightarrow{r}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0},t)\right) - Ze\dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{0},t) \\
&= -Ze\left(\overrightarrow{r}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0},t) - Ze\dot{\overrightarrow{r}} \wedge \overrightarrow{B}(\overrightarrow{0},t) \\
&= \left(\overrightarrow{p}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E} + \dot{\overrightarrow{p}} \wedge \overrightarrow{B}
\end{aligned}
$$

La force subie par unité de volume du gaz s'exprime donc sous la forme $\overrightarrow{F}d\tau = \overrightarrow{f}dN = \overrightarrow{f}nd\tau$, d'où l'expression

$$
\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{P}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E} + \dot{\overrightarrow{P}} \wedge \overrightarrow{B}
$$

## 2.3 Force dipolaire et pression de radiation

On cherche à estimer la moyenne temporelle de la force appliquée par unite de volume.

On a, par intégration par partie,

$$
\begin{aligned}
\left\langle A\dot{B}\right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T A\dot{B}dt \\
&= \frac{1}{T}\left[AB\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T \dot{A}Bdt \\
&= 0 - \left\langle \dot{A}B\right\rangle
\end{aligned}
$$

et l'équation de Maxwell Faraday donne $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}$. On peut donc écrire :

$$
\left\langle \overrightarrow{F}\right\rangle = \left\langle \left(\overrightarrow{P}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E} + \dot{\overrightarrow{P}} \wedge \overrightarrow{B}\right\rangle = \left\langle \left(\overrightarrow{P}.\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{E} + \overrightarrow{P} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}\right)\right\rangle
$$

On suppose la dépendance temporelle du rayonnement harmonique et on peut alors écrire, pour toutes grandeurs $A = \mathrm{Re}\left(\underline{\mathrm{A}}e^{-i\omega t}\right)$ et $B = \mathrm{Re}\left(\underline{\mathrm{B}}e^{-i\omega t}\right)$

$$
\begin{aligned}
\langle AB\rangle &= \frac{1}{4}\left\langle \left(\underline{\mathrm{A}}e^{-i\omega t} + \underline{\mathrm{A}}^*e^{+i\omega t}\right)\left(\underline{\mathrm{B}}e^{-i\omega t} + \underline{\mathrm{B}}^*e^{+i\omega t}\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left\langle \underline{\mathrm{AB}}e^{-2i\omega t}\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle \underline{\mathrm{A}}^*\underline{\mathrm{B}}^*e^{+2i\omega t}\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle \underline{\mathrm{AB}}^*\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle \underline{\mathrm{A}}^*\underline{\mathrm{B}}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{AB^*}\right)
\end{aligned}
$$

On peut donc réécrire l'expression de la force moyenne sous la forme

$$
\left\langle \overrightarrow{F}\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left(\underline{\overrightarrow{P}}.\overrightarrow{\nabla}\right)\underline{\overrightarrow{E^*}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{P^*}} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \underline{\mathrm{E}}\right)\right)
$$

et nous allons calculer les deux termes séparémment.

**Développement du premier terme**

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon_0\chi}\left(\underline{\overrightarrow{P}}.\overrightarrow{\nabla}\right)\underline{\overrightarrow{E^*}} &= \left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r})\exp\left(i\varphi(\overrightarrow{r}) - i\omega t\right).\overrightarrow{\nabla}\right)\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r})\exp\left(-i\varphi(\overrightarrow{r}) + i\omega t\right)\right) \\
&= \exp\left(i\varphi(\overrightarrow{r}) - i\omega t\right)\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r}).\overrightarrow{\nabla}\right)\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r})\right)\exp\left(-i\varphi(\overrightarrow{r}) + i\omega t\right) \\
&+ \exp\left(i\varphi(\overrightarrow{r}) - i\omega t\right)\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r}).\overrightarrow{\nabla}\right)\left(\exp\left(-i\varphi(\overrightarrow{r}) + i\omega t\right)\right)\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r}) \\
&= -\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r}).\overrightarrow{\nabla}\right)\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r})\right) - i\left(\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r}).\overrightarrow{\nabla}\varphi(\overrightarrow{r})\right)\overrightarrow{E_0}(\overrightarrow{r})
\end{aligned}
$$

**Développement du second terme**

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{\epsilon_0\chi}\underline{\vec{P^*}} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \underline{\mathrm{E}}\right) & = & \left(\vec{E_0}(\vec{r}) \exp\left(-i\varphi(\vec{r}) + i\omega t\right)\right) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E_0}(\vec{r}) \exp\left(i\varphi(\vec{r}) - i\omega t\right)\right)\right) \\
& = & \left(\vec{E_0}(\vec{r}) \exp\left(-i\varphi(\vec{r}) + i\omega t\right)\right) \wedge \left(\exp\left(i\varphi(\vec{r}) - i\omega t\right) \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E_0}(\vec{r})\right)\right) \\
& + & \left(\vec{E_0}(\vec{r}) \exp\left(-i\varphi(\vec{r}) + i\omega t\right)\right) \wedge \left(\left(\vec{\nabla}\left(\exp\left(i\varphi(\vec{r}) - i\omega t\right)\right)\right) \wedge \left(\vec{E_0}(\vec{r})\right)\right) \\
& \text{car on a} & \vec{\nabla} \wedge \left(\rho\vec{V}\right) = \rho\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{V}\right) + \left(\vec{\nabla}\rho\right) \wedge \vec{V} \\
& = & \left(\vec{E_0}(\vec{r})\right) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E_0}(\vec{r})\right)\right) \\
& - & i\left(\vec{E_0}(\vec{r})\right) \wedge \left(\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right) \wedge \left(\vec{E_0}(\vec{r})\right)\right) \\
& = & \left(\vec{E_0}(\vec{r})\right) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E_0}(\vec{r})\right)\right) \\
& - & i\left(\vec{E_0}(\vec{r}).\vec{E_0}(\vec{r})\right)\left(\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right) \\
& + & i\left(\vec{E_0}(\vec{r}).\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right)\vec{E_0}(\vec{r}) \\
& \text{car on a} & \vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}.\left(\vec{A}.\vec{B}\right)
\end{array}
$$

En regroupant les expression on trouve

$$
\begin{array}{rcl}
\left(\underline{\vec{P}}.\vec{\nabla}\right)\underline{\vec{E^*}} + \underline{\vec{P^*}} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \underline{\mathrm{E}}\right) & = & \epsilon_0\chi\left(\left(\vec{E_0}.\vec{\nabla}\right)\left(\vec{E_0}\right) + \left(\vec{E_0}\right) \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E_0}\right)\right) - iE_0^2(\vec{r})\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right) \\
& = & \epsilon_0\chi\left(\vec{\nabla}\left(\frac{E_0^2}{2}\right) - iE_0^2(\vec{r})\vec{\nabla}\left(\varphi(\vec{r})\right)\right) \\
& \text{car on a} & \vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \vec{B} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) + \vec{A} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) + \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}
\end{array}
$$

On obtient finalement l'expression de la force

$$
\begin{array}{rcl}
\left\langle\vec{F}\right\rangle & = & \left\langle\left(\vec{P}.\vec{\nabla}\right)\vec{E} + \vec{P} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right)\right\rangle \\
& = & \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left(\underline{\vec{P}}.\vec{\nabla}\right)\underline{\vec{E^*}}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{P^*}} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \underline{\mathrm{E}}\right)\right) \\
& = & \frac{\epsilon_0\chi'}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{E_0^2(\vec{r})}{2}\right) + \frac{\epsilon_0\chi''}{2}E_0^2(\vec{r})\vec{\nabla}\left(\varphi(\vec{r})\right)
\end{array}
$$

En utilisant les expressions calculées précédemment, on trouve la forme

$$
\begin{array}{rcl}
\left\langle\vec{F}\right\rangle & = & \overrightarrow{F_{\text{dipolaire}}} + \overrightarrow{F_{\text{radiation}}} \\
& = & \frac{\epsilon_0\chi'}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{E_0^2(\vec{r})}{2}\right) + \frac{\epsilon_0\chi''}{2}E_0^2(\vec{r})\vec{\nabla}\left(\varphi(\vec{r})\right)
\end{array}
$$

On identifier ainsi deux termes

**La force dipolaire**

$$
\overrightarrow{F_{\text{dipolaire}}} = \frac{\epsilon_0\chi'}{2}\vec{\nabla}\left(\frac{E_0^2(\vec{r})}{2}\right)
$$

- Interprétation quantique : absorption d'un photon dans un mode $\left(\omega, \vec{k}\right)$ du champ, réémission par émission stimulée dans un mode $\left(\omega, \vec{k}'\right)$.
- Interprétation énergétique : les niveaux d'énergie des atomes sont modifiés en présence du champ (effet Stark), ce qui se traduit par une énergie potentielle effective (on peut écrire $\overrightarrow{F_{\text{dipolaire}}} = -\vec{\nabla}U$). Ce décalage peut être positif ou négatif en fonction de désaccord $\delta$, ce qui se traduit par une force attractive (les atomes sont attirés par les zones de haute intensité) ou répulsive (les atomes fuient les zones de haute intensité)

**La pression de radiation**

$$
\overrightarrow{F_{\text{radiation}}} = \frac{\epsilon_0\chi''}{2}E_0^2(\vec{r})\vec{\nabla}\left(\varphi(\vec{r})\right)
$$

- Interprétation classique : pression de radiation exercée par le vecteur de Poynting de l'onde électromagnétique.

- Interprétation semi classique : dans le cas d'une onde plane de vecteur d'onde $\overrightarrow{k_L}$, en notant $I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \left|\overrightarrow{E}\right|^2$ l'intensité et $I_{\text{sat}} = \frac{\Gamma^2 \hbar c}{2\chi_0 \omega_A} = \frac{\hbar \omega_A^3 \Gamma}{4\pi c^2}$ l'intensité de saturation, on peut écrire :

$$\overrightarrow{F_{\text{radiation}}} = \frac{\Gamma}{2}\frac{I}{I_{\text{sat}}}\frac{(\Gamma/2)^2}{\delta^2+(\Gamma/2)^2}\hbar\overrightarrow{k_L}$$

La pression de radiation apparait alors comme la conséquence de l'absorption d'un photon dans un mode $\left(\omega, \overrightarrow{k}\right)$ du champ suivit de la réémission par émission spontanée dans un mode aléatoire. Chaque photon absorbé communique à l'atome son impulsion $\hbar\overrightarrow{k_L}$. La réémission a lieu dans une direction aléatoire et les impulsions accumulées lors de ce processus se compensent les unes les autres. La force effective perçue par les atomes peut alors être interprêtée comme une conservation de la quantité de mouvement : en considérant l'ensemble des $dN$ photons absorbés entre $t$ et $t + dt$, on peut écrire la conservation de mouvement de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p}(t+dt) - \overrightarrow{p}(t) &= \overrightarrow{0} - dN\hbar\overrightarrow{k_L} \\
&= \overrightarrow{F_{\text{atome }\to\text{photons}}}dt \\
&= -\overrightarrow{F_{\text{photons}\to\text{atome}}}\,dt
\end{aligned}$$

où on a utilisé la seconde et la troisième loi de Newton. On en déduit le nombre de photons absorbés et réémis par seconde :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\Gamma}{2}\frac{I}{I_{\text{sat}}}\frac{(\Gamma/2)^2}{\delta^2+(\Gamma/2)^2}$$

# 3 Application au refroidissement d'atomes

## 3.1 Rappel sur l'effet Doppler et l'effet Zeeman

### 3.1.1 Effet Doppler

Décalage en fréquence dû à la vitesse des atomes (voir le document consacré)

$$\omega \to \omega - \overrightarrow{k_L}.\overrightarrow{v}$$

### 3.1.2 Effet Zeeman

Décalage des niveaux d'énergie dû à la présence d'un champ magnétique (voir le document consacré). Un niveau de moment cinétique $m_F$ suivant la direction du champ et dôté d'un facteur de Landé $g_F$ subit un décalage

$$\delta E = \frac{\mu_B}{\hbar} g_F m_F \left\|\overrightarrow{B}\right\|$$

## 3.2 Mélasse optique

**L'idée**

On envoie deux ondes planes contrapropageants ($\overrightarrow{k_1} = k_L\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{k_2} = -k_L\overrightarrow{u_z}$) de même pulsation $\omega_L$ et d'amplitude $E_0$. On choisit un désaccord vers le rouge : $\delta \leq 0$.

A cause de son mouvement, l'atome subit un effet Doppler qui décale la fréquence du faisceau vers lequel il se déplace vers le bleu et se rapproche donc de la résonance. A l'inverse, le faisceau dont il s'éloigne lui parait encore plus décalé vers le rouge et donc encore plus loin de la résonance.

L'atome va donc interagir d'avantage avec le laser vers lequel il avance et qui exerce sur lui une pression de radiation opposée à son mouvement. Il est donc en permanence ralenti par ses interactions avec la lumière.

**Traitement**

On considère la situation décrite ci dessus.

Comme l'amplitude des deux ondes est uniforme, seule la pression de radiation intervient. Dans le cas d'une onde plane, $\varphi(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}$ donc $\overrightarrow{\nabla}(\varphi(\overrightarrow{r})) = \overrightarrow{k_L}$. La force totale subie par l'atome s'écrit alors

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \left(\chi''(\omega_1) - \chi''(\omega_2)\right) k_L \overrightarrow{u_z}$$

Supposons que l'atome bouge avec une vitesse $v_z \overrightarrow{u_z}$. Dans ce cas, par effet Doppler, l'atome voit la fréquence de chaque faisceau modifiée : $\omega \to \omega - \overrightarrow{k_L}.\overrightarrow{v}$. En considérant la vitesse suffisamment faible, on peut se contenter d'un développement limitée à l'ordre, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \left(\chi''(\omega_L - k_L v_z) - \chi''(\omega_L + k_L v_z)\right) k_L \overrightarrow{u_z} \\
&= -\epsilon_0 E_0^2 k_L v_z \left(\frac{\partial \chi''}{\partial \omega}\right)_{\omega_L} k_L \overrightarrow{u_z} \\
&= \frac{ne^2}{2m\omega_A} E_0^2 k_L^2 \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} \frac{-2\delta}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} v_z \overrightarrow{u_z} \\
&= -\frac{\hbar k_L^2}{m} s_0 \frac{2\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \overrightarrow{v} \\
&= -m\gamma \overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

**Analyse**

- On obtient ainsi une force de frottement fluide, qui ralentit effectivement les particules.
- L'absorption de photons chauffe en permanence le nuage, l'émission spontanée le refroidit ; cela se traduit par une diffusion dans l'espace des phases avec un coefficient $D_p = 3\hbar^2 \Gamma k_L^2 s_0$. On peut montrer que la température minimale atteinte avec un désaccord $\delta$ s'écrit :

$$k_B T = \frac{\hbar\Gamma}{4} \left(\frac{2|\delta|}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{2|\delta|}\right) \geq \frac{\hbar\Gamma}{2}$$

  La température minimale $k_B T_{min} = \frac{\hbar\Gamma}{2}$ est obtenue pour $\delta = -\Gamma/2$. Ordre de grandeur typique : $150\,\mu$K.

## 3.3 Piège magnéto optique (MOT)

**L'idée**

En plus du ralentissement des atomes, on veut également pouvoir les piéger. On rajoute pour cela une interaction qui dépend de la position de l'atome : si l'atome est à droite du centre, on veut qu'il interagisse d'avantage avec un faisceau qui le repousse vers la gauche et inversement.

On utilise pour cela les décalages Zeeman d'un niveau excité dégénéré.

**Traitement**

Considérons un atome à deux niveaux avec

- Un niveau fondamental $|g, 0\rangle$ non dégénéré, avec un moment cinétique nulle
- Un niveau excité avec un moment cinétique $F = 1$ par conséquent trois sous niveaux $\{|e, +1\rangle, |e, 0\rangle, |e, -1\rangle\}$ de moment cinétique suivant l'axe $z$ respectivement $+\hbar$, 0 et $-\hbar$.

On place cet atome dans un champ magnétique non uniforme $\overrightarrow{B} = \frac{b'}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$, créé par deux bobines en configuration anti-Helmholtz.

On se limite ici à l'étude à une dimension (suivant $z$). On envoie deux faisceaux contrapropageant décalés vers le rouge (cf mélasse optique), avec des polarisations circulaires $\sigma^+$ (pour le faisceau $+k\overrightarrow{u_z}$) et $\sigma^-$(pour le faisceau $-k\overrightarrow{u_z}$).

On admet qu'avec une polarisation $\sigma^+$ (resp. $\sigma^-$) un photon ne puisse permettre qu'une transition augmentant de $\hbar$ (resp. diminuant de $\hbar$) la composante suivant $z$ de l'atome. Par conséquent, le faisceau se propageant suivant $+k\overrightarrow{u_z}$ ne permet que la transition $|g, 0\rangle \to |e, +1\rangle$ tandis que le faisceau se propageant suivant $-k\overrightarrow{u_z}$ ne permet que la transition $|g, 0\rangle \to |e, -1\rangle$.

**Pour le faisceau $+k\overrightarrow{u_z}$**

Le désaccord perçu par l'atome provient de trois termes :

- Le désaccord au repos $\delta_0 = \omega_L - \omega_a$
- L'effet Doppler, qui change la fréquence perçue par l'atome en $\omega'_L = \omega_L - \overrightarrow{k_L}.\overrightarrow{v} = \omega_L - k_L v_z$
- L'effet Zeeman, qui change l'écart d'énergie entre les niveaux de $\delta E = \delta E_{|e,m_f\rangle} - \delta E_{|g,0\rangle} = \frac{\mu_B}{\hbar} g_F m_F \left\|\overrightarrow{B}\right\| - 0$ et la fréquence atomique correspondant à la transition $|g,0\rangle \to |e,m_f\rangle$ est par conséquent changée en $\omega'_a = \omega_a + \mu_B g_F m_F \left\|\overrightarrow{B}\right\|$. En l'occurence, comme la seule transition permise est $|g,0\rangle \to |e,+1\rangle$, la fréquence est modifiée en $\omega'_a = \omega_a + \mu_B g_F b' z$

Le désaccord total s'exprime donc sous la forme

$$\delta = \delta_0 - k_L v_z - \mu_B g_F b' z$$

**Pour le faisceau $-k\overrightarrow{u_z}$**

Avec un raisonnement similaire, on trouve l'expression du désaccord

$$\delta = \delta_0 + k_L v_z + \mu_B g_F b' z$$

**Avec les deux faisceaux**

La superposition linéaire des deux faisceaux exerce sur chaque unité de volume une force

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \left(\chi''(\omega_L - k_L v_z - \mu_B g_F b' z) - \chi''(\omega_L + k_L v_z + \mu_B g_F b' z)\right) k_L \overrightarrow{u_z} \\
&= -\epsilon_0 E_0^2 k_L v_z \left(\frac{\partial \chi''}{\partial \omega}\right)_{\omega_L} k_L \overrightarrow{u_z} - \epsilon_0 E_0^2 \mu_B g_F b' z \left(\frac{\partial \chi''}{\partial \omega}\right)_{\omega_L} k_L \overrightarrow{u_z} \\
&= \frac{e^2}{2m\omega_A} E_0^2 k_L^2 \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} \frac{-2\delta}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} v_z \overrightarrow{u_z} \\
&\quad - \frac{e^2}{2m\omega_A} E_0^2 \mu_B g_F b' z \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} \frac{-2\delta}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} \overrightarrow{u_z} \\
&= -\frac{\hbar k_L^2}{m} s_0 \frac{2\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} v_z \overrightarrow{u_z} - k_L \mu_B g_F b' s_0 \frac{2\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} z \overrightarrow{u_z} \\
&= -m\gamma v_z \overrightarrow{u_z} - \kappa z \overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

En généralisant à 3 dimensions, on peut montrer que les atomes subissent à la fois une force de friction fluide qui les ralenti et une force de rappel qui les piège.

## 3.4 Ralentissement Zeeman

### L'idée

Imaginons qu'on veuille ralentir un jet d'atomes dirigé suivant $+\overrightarrow{u_z}$ avec une vitesse $v_0$. Il ne suffit pas d'envoyer un faisceau laser suivant $-\overrightarrow{u_z}$ : si le faisceau est à résonnance avec les atomes se déplaçant à $v_0$, il sera de plus en plus désaccordé au fur et à mesure que les atomes ralentissent, à cause de l'effet Doppler. Initialement à résonnance, le faisceau ne sera plus capable de continuer à ralentir des atomes légèrement moins rapides.

Le ralentissement Zeeman utilise l'effet Zeeman pour compenser l'effet Doppler. La fréquence du laser est fixée de manière à ce que des atomes au repos voient une fréquence résonnante : on prendra donc $\delta_0 = \omega_{\text{laser}} - \omega_{\text{atome}} \simeq 0$. Lorsque les atomes sont animés d'une vitesse $v_0$, il subissent un effet Doppler important et perçoivent un désaccord $\delta = \delta_0 + k_L v_0$. On ajoute un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ de façon à ce que le décalage Zeeman compense l'effet Doppler : $\delta_{\text{Zeeman}} = -k_L v_0$. Par conséquent, la lumière perçue par les atomes est bien à résonnance et ralentit efficacement les atomes. On adapte spatialement le champ magnétique en diminuant progressivement sa valeur en même temps que, la vitesse diminuant, l'effet Doppler diminue ; de cette manière, la lumière est en permanence à résonnance avec la transition atomique.

# 4 Références


- Dalibard, J, *Atomes Froids,* Cours pour le Master 2 Concepts Fondamentaux de la Physique, http://www.phys.ens.fr/~dalibard/Notes_de_cours/DEA_atomes_froids_actuel.pdf
- Graner, F., Kaiser, R., Marchand, A., Salez, T., *Petits problèmes de physique : du quotidien au laboratoire: Corrigés détaillés, méthodes*, Dunod (2011)

  ISBN-10: 2100545221
- Ecole Normale Supérieure, Sujet de physique I, série PC, session 2010