Diffusion de lumière.

Ref: CCT processus d'interaction...

1 Différents types de diffusion

	$\|\psi_i\rangle$	$\|\psi_b\rangle$	$\|\psi_f\rangle$	σ
Diffusion Thomson	$\|g, k\overrightarrow{u}\rangle$	$\|\overrightarrow{p}, 0\rangle$	$\left\|g, k\overrightarrow{u'}\right\rangle$	$\frac{8\pi}{3} r_0^2$
Diffusion Compton	$\|g, k\overrightarrow{u}\rangle$	$\|\overrightarrow{p}, 0\rangle$	$\left\|\overrightarrow{p'}, k'\overrightarrow{u'}\right\rangle$	
Diffusion Rayleigh	$\|g, k\overrightarrow{u}\rangle$	$\hbar\omega \ll \hbar\omega_0$	$\left\|g, k\overrightarrow{u'}\right\rangle$	$\frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$
Diffusion résonnante	$\|g, k\overrightarrow{u}\rangle$	$\|e, 0\rangle$	$\left\|g, k\overrightarrow{u'}\right\rangle$	$\frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1+4(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma})^2}$
Diffusion Raman (Stockes)	$\|a, k\overrightarrow{u}\rangle$	$\hbar\omega \ll \hbar\omega_0$	$\left\|a', k'\overrightarrow{u'}\right\rangle$ $E_{a'} > E_a$	
Diffusion Raman (anti Stockes)	$\|a, k\overrightarrow{u}\rangle$	$\hbar\omega \ll \hbar\omega_0$	$\left\|a', k'\overrightarrow{u'}\right\rangle$ $E_{a'} < E_a$	

$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$

2 Résolvante

Avec $H = H_0 + V$, on note$\{(|k\rangle, E_k)\}$ les éléments propres de H_0.

2.1 Cas général

Lien avec l'opérateur d'évolution p164

$$U(\tau)\,\theta(\tau) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dE\, e^{i\tau E/\hbar} G_+(E)$$

$$G_+(E) = \lim_{\eta\to 0^+} \frac{1}{E-H+i\eta}$$

Equation de Dyson

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + ...$$

L'ensemble des $\{|k\rangle\}$ forme une base othonormée et on a donc $\langle k| H_0 |k'\rangle = 0$. On a donc

$$\langle k|\, G(E)\, |l\rangle = \frac{\delta_{kl}}{E-E_l} + \frac{1}{E-E_k} V_{kl} \frac{1}{E-E_l} + \sum_i \frac{1}{E-E_k} V_{ki} \frac{1}{E-E_i} V_{il} \frac{1}{E-E_l} + ... \tag{1}$$

2.2 Quitter un état

On note p170

$$R_b(E) = V_{bb} + \sum_{i\neq b} V_{bi} \tfrac{1}{E-E_i} V_{ib} + \sum_{i\neq b}\sum_{j\neq b} V_{bi} \tfrac{1}{E-E_i} V_{ij} \tfrac{1}{E-E_j} V_{jb} + ...$$

En regroupant dans l'expression (1) les termes par puissance de $\frac{1}{E-E_b}$ croissante, on a

$$\begin{aligned} \langle \psi_b|\, G(E)\, |\psi_b\rangle &= \frac{1}{E-E_b} + \left(\frac{1}{E-E_b}\right)^2 R_b(E) + \left(\frac{1}{E-E_b}\right)^3 R_b(E)^2 + ... \\ &= \frac{1}{E-E_b} \sum \left(\frac{R_b(E)}{E-E_b}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{E-E_b-R_b(E)} \end{aligned}$$

On notera $R_b(E\pm i\eta) = \Delta_b(E) \mp i\frac{\hbar}{2}\Gamma_b(E)$

3 Diffusion résonnante

p217

On considère la transition $|\psi_i\rangle = \left|g, \overrightarrow{k}\right\rangle \longrightarrow |\psi_f\rangle = \left|g, \overrightarrow{k'}\right\rangle$ avec l'existence d'un état intermédiaire $|\psi_b\rangle = |e, 0\rangle$. On cherche

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim_{T\to+\infty} \langle \psi_f|\, U(T)\, |\psi_i\rangle \\ &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{T\to+\infty} \int_{C^+} dE\, e^{i\tau E/\hbar} \langle \psi_f|\, G_+(E)\, |\psi_i\rangle \end{aligned}$$

En considérant le développement de Dyson $G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G V G_0$, on trouve

$$\langle \psi_f|\, G_+(z)\, |\psi_i\rangle = \tfrac{\delta_{fi}}{z-E_i} + \tfrac{1}{z-E_i}\tfrac{1}{z-E_i} \langle \psi_f|\, (V + VG(z)V)\, |\psi_i\rangle$$

On montre que seuls comptent les poles situés en $z = E_f$ et $z = E_f$. L'expression prend alors la forme

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2i\pi\delta(E_f - E_i) \langle \psi_f|\, (V + VG(E_i + i\eta)V)\, |\psi_i\rangle$$

Compte tenu des couplages

$$\langle \psi_f|\, (V + VG(E_i + i\eta)V)\, |\psi_i\rangle \quad = \quad 0 + V_{fb}V_{bi} \langle \psi_b|\, G_+(z)\, |\psi_b\rangle$$

Approx 0 $G(E_i + i\eta) \simeq G_0(E_i + i\eta)$

Approx 1 $\langle \psi_b|\, G_+(z)\, |\psi_b\rangle = \frac{1}{z-E_b-R_b(E_b)}$

On a alors (p15)

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - 2i\pi\delta(E_f - E_i) \frac{V_{fb}V_{bi}}{(E_g + \hbar\omega) - (E_e + \Delta_b) + i\frac{\hbar}{2}\Gamma_b} \\ &= \delta_{fi} - 2i\pi\delta(E_f - E_i)\mathcal{T}_{fi} \end{aligned}$$

4 Section efficace

p506

4.1 Section efficace différentielle

Lien avec diffusion

La probabilité de transition par unité de temps est donnée par :

$$\begin{aligned} w_{fi} &= \frac{2\pi}{\hbar} \left|\mathcal{T}_{fi}\right|^2 \delta(E_f - E_i) \\ \mathcal{T}_{fi} &= \frac{V_{fb}V_{bi}}{(E_g + \hbar\omega) - (E_e + \Delta_b) + i\frac{\hbar}{2}\Gamma_b} \\ &= \frac{1}{\hbar}\frac{V_{fb}V_{bi}}{\omega - (\omega_0 + \delta\omega) + i\Gamma_b/2} \end{aligned}$$

Eléments de matrice $V = -\overrightarrow{d}.\overrightarrow{E_\perp}$

On a suppose $\langle b| \overrightarrow{d} |a\rangle = \begin{pmatrix} d_{ba} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on note $\Gamma_b = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^3 \frac{d_{ba}^2}{\epsilon_0\hbar}$. On prendra $\delta\omega = 0$.

$$\begin{aligned} \langle b| \overrightarrow{d}.\overrightarrow{E_\perp} |a\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \langle b| \overrightarrow{d}.\overrightarrow{\epsilon} |a\rangle \\ \mathcal{T}_{fi} &= \frac{\epsilon_z\epsilon_z'}{2\epsilon_0 L^3}\frac{\omega d_{ba}^2}{\omega - \omega_0 + i\Gamma_b/2} \\ &\simeq 3\pi c^3\hbar\frac{\epsilon_z\epsilon_z'}{\omega_0^2 L^3}\frac{\Gamma_b/2}{\omega - \omega_0 + i\Gamma_b/2} \end{aligned}$$

Section efficace différentielle

On veut le nombre $dn(\Omega)$ de photons réémis par unité de temps dans la direction $\overrightarrow{u}$ à $d\Omega$ près :

$$\begin{aligned} dn(\Omega) &= \sum_{|f\rangle\,\overrightarrow{k'}\parallel\overrightarrow{u}} w_{fi} \\ &= d\Omega \int k'^2 dk'\, \rho_f\left(\overrightarrow{k'}\right) w_{fi} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} d\Omega \int k'^2 dk'\, \frac{1}{(2\pi/L)^3} \left|\mathcal{T}_{fi}\right|^2 \delta(\hbar k' c - \hbar k c) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} d\Omega \int k'^2 dk'\, \frac{1}{(2\pi/L)^3} \left|\mathcal{T}_{fi}\right|^2 \frac{1}{\hbar c}\delta(k' - k) \\ &= \frac{9}{4}\frac{c^5 k^2}{\omega_0^4}\left(\epsilon_z\epsilon_z'\right)^2 \frac{(\Gamma_b/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Gamma_b/2)^2}\frac{d\Omega}{L^3} \\ &= \frac{9}{16\pi^2}\lambda^2\left(\epsilon_z\epsilon_z'\right)^2 \frac{(\Gamma_b/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Gamma_b/2)^2}\frac{c}{L^3}d\Omega \\ &= \phi\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega \end{aligned}$$

avec $\phi = c/L^3$, on trouve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{9}{16\pi^2}\lambda^2\left(\epsilon_z\epsilon_z'\right)^2 \frac{(\Gamma_b/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Gamma_b/2)^2}$$

4.2 Section efficace totale

Pour tenir compte de la diffusion totale, il faut considérer les deux polarisations possibles de la lumière émise $\vec{\epsilon_1}$ et $\vec{\epsilon_2}$.

On montre que

$$\epsilon'^2_{1,z} + \epsilon'^2_{2,z} = 1 - u'^2_z$$

On suppose que la polarisation initiale est suivant z : $\epsilon_z = 1$

La section efficace totale s'exprime alors sous la forme

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{tot}} &= \int d^2u' \, \frac{9}{16\pi^2}\lambda^2 \frac{(\Gamma_b/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Gamma_b/2)^2} \left(\epsilon'^2_{1,z} + \epsilon'^2_{2,z}\right) \\
&= \frac{9}{16\pi^2}\lambda^2 \frac{(\Gamma_b/2)^2}{(\omega-\omega_0)^2 + (\Gamma_b/2)^2} \int d^2u' \, \left(1 - u'^2_z\right) \\
&= \frac{9}{16\pi^2}\lambda^2 \frac{1}{1 + 4(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma})^2} \frac{8\pi}{3} \\
&= \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + 4(\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma})^2}
\end{aligned}$$