Théorème de Wiener Khintchine

1 Théorème de Wiener Khintchine

1.1 Défintions

Processus ergodique

On considère un processus aléatoire réel $x(t)$.

Si on répète un grand nombre de fois l'expérience et qu'on mesure x à l'instant t, on obtient la valeur moyenne$\langle x(t)\rangle = \frac{1}{N}\sum x_i(t) = \langle x\rangle (t)$.

- Si le processus est *stationnaire*, alors la valeur moyenne ne dépend pas du temps : $\langle x(t_1)\rangle = \langle x(t_2)\rangle = \langle x\rangle$
- Si un processus stationnaire est *ergodique*, alors sa valeur moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisation coïncide avec la valeur moyenne sur un temps long d'une réalisation particulière :

$$\underset{N\to+\infty}{lim} \frac{1}{N}\sum x_i(t_0) = \underset{T\to+\infty}{lim} \frac{1}{T}\int x_0(t)dt$$

Fonction d'autocorrélation

Soit $z(t)$ un processus aléatoire complexe. On définit sa fonction d'autocorrélation κ par

$$\kappa\left(t_1, t_2\right) = \left\langle z^*\left(t_1\right) z\left(t_2\right)\right\rangle$$

- Si le processus est stationnaire, alors Γ_z ne dépend que de l'intervalle $\tau = t_2 - t_1$ et on a

$$\kappa\left(\tau\right) = \left\langle z^*\left(t\right) z\left(t{+}\tau\right)\right\rangle$$

- Si le processus est de plus ergodique, alors

$$\kappa\left(\tau\right) = \underset{T\to+\infty}{lim} \frac{1}{T}\int_T \left(z^*\left(t\right) z\left(t{+}\tau\right)\right) dt$$

Densité spectrale de puissance

On considère un processus aléatoire stationnaire et ergodique $z(t)$. On définit $z_T(t)$, troncature de z sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

On considère la transfomée de Fourier de $z_T(t)$:

$$\tilde{z_T}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z_T(t)e^{i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T/2}^{+T/2} z(t)e^{i\omega t}dt$$

La densité spectrale de puissance du processus est alors donnée par

$$\boxed{S_z(\omega) = \underset{T\to+\infty}{lim} \frac{1}{T}\left\langle \left|\tilde{z_T}(\omega)\right|^2\right\rangle}$$

Propriété

$$\boxed{\left\langle \left|z(t)\right|^2\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\omega)d\omega}$$

Démonstration

En effet, le théorème de Parceval donne pour chaque réalisation i,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{z_{T,i}}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |z_{T,i}(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{+T/2} |z_i(t)|^2 dt,$$

$$donc\ \frac{1}{N}\sum\left(\int_{-T/2}^{+T/2} |z_i(t)|^2 dt\right) = \frac{1}{N}\sum\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{z_{T,i}}(\omega)|^2 d\omega\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-T/2}^{+T/2}\left(\frac{1}{N}\sum |z_i(t)|^2\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\sum |\tilde{z_{T,i}}(\omega)|^2\right) d\omega$$

$$\Leftrightarrow \int_{-T/2}^{+T/2}\left\langle |z(t)|^2\right\rangle dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle |\tilde{z_T}(\omega)|^2\right\rangle d\omega$$

et $\int_{-T/2}^{+T/2}\left\langle |z(t)|^2\right\rangle dt = \int_{-T/2}^{+T/2}\left\langle |z|^2\right\rangle dt = T\left\langle |z|^2\right\rangle_T$ *car le processus est stationnaire. On a donc*

$$\left\langle |z|^2\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\left\langle |z|^2\right\rangle_T = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle |\tilde{z_T}(\omega)|^2\right\rangle d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left\langle |\tilde{z_T}(\omega)|^2\right\rangle\right) d\omega\ ,$$

d'où le résultat.

1.2 Théorème de Wiener Khintchine

Énoncé

Soit z un processus aléatoire stationnaire et ergodique. Alors sa fonction d'autocorrélation est la transformée de Fourier de sa densité spectrale d'énergie à un facteur $\sqrt{2\pi}$ près :

$$\boxed{\kappa(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_z(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega.}$$

Démonstration

En effet, en définissant $z''_T(t) = z_T(t+\tau)$, *on peut écrire avec le théorème de Parceval*

$$\int z_T^*(t) z''_T(t) dt = \int \tilde{z_T}^*(\omega)\tilde{z''_T}(\omega) d\omega$$

Or $\tilde{z''_T}(\omega) = \tilde{z_T}(\omega) e^{-i\omega\tau}$ *donc*

$$\int \tilde{z_T}^*(\omega)\tilde{z''_T}(\omega) d\omega = \int \tilde{z_T}^*(\omega)\tilde{z_T}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \int |\tilde{z_T}(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

D'autre part,

$$\int z_T^*(t) z''_T(t) dt = \int z_T^*(t) z_T(t+\tau) dt = \int_{-T/2}^{+T/2} z^*(t) z(t+\tau) dt$$

On a donc

$$\int_{-T/2}^{+T/2} z^*(t) z(t+\tau) dt = \int |\tilde{z_T}(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega,$$

et en prenant la moyenne d'ensemble,

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \langle z^*(t) z(t+\tau)\rangle dt = \int \left\langle |\tilde{z_T}(\omega)|^2\right\rangle e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

Enfin, le processus étant stationnaire, $\langle z^*(t) z(t+\tau)\rangle = \Gamma_z(\tau)$ *donc* $\int_{-T/2}^{+T/2}\langle z^*(t) z(t+\tau)\rangle dt = T\kappa(\tau)$ *et on en déduit, en faisant tendre* T *vers l'infini, le théorème de Wiener Khintchine.*

2 Applications

2.1 Forme lorentzienne d'une raie atomique

Modèle du train d'onde

On considère un ensemble d'atomes à deux niveaux et on s'intéresse à la population dans l'état excité.

De manière spontanée, un des atomes peut se désexciter à émettre un rayonnement de fréquence ω_0. Ce rayonnement peut entrainer l'émission stimulée des atomes environnants et se traduire par l'émission d'une onde cohérente $E_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

A chaque nouvelle émission spontanée, la phase du rayonnement change alétoirement. Le rayonnement émis par l'ensemble des atomes prend donc la forme

$$\begin{aligned} E(t) &= \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}^*(t) \\ \mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi(t))} \end{aligned}$$

où $\varphi(t)$ est une variable aléatoire qui traduit l'émission spontanée des atomes sous forme de sauts de phase.

Loi de probabilité

Calculons la probabilité $p(t)$ que l'atome ne se soit pas desexcité pendant une durée t.

La désexcitation spontanée est un processus aléatoire sans mémoire. On note Γdt la probabilité qu'un atome se désexcite spontanément entre l'instant t et l'instant $t + dt$.

La probabilité $p(t)$ vérifie

$$p(t + dt) = p(t) \times (1 - \Gamma dt)$$

et avec $p(0) = 1$, on trouve

$$p(t) = \exp(-\Gamma t)$$

Fonction d'autocorrélation

Calculons la fonction d'autocorrélation $\kappa(\tau)$ du rayonnement émis.

Par disjonction des cas, on distingue deux contributions :

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) &= \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle_{\text{avec saut de phase}} \\ &+ \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle_{\text{sans saut de phase}} \end{aligned}$$

- Si la phase n'a pas sauté pendant la durée $|\tau|$, alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle &= \mathcal{E}_0^2 e^{i\omega_0 \tau} \\ &= \mathcal{E}_0^2 e^{i\omega_0 \tau} \end{aligned}$$

  Cette éventualité a une probabilité $p(|\tau|)$ de se produire.

- Si la phase a sauté aléatoirement pendant la durée $|\tau|$, alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle &= \mathcal{E}_0^2 e^{i\omega_0 \tau} \left\langle e^{i\varphi(t)} \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Cette éventualité a une probabilité $1 - p(|\tau|)$ de se produire.

La fonction d'autocorrélation est donc donnée par

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) &= \langle \mathcal{E}^*(t)\mathcal{E}(t+\tau) \rangle \\ &= p(|\tau|) \times E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} + (1 - p(|\tau|)) \times 0 \\ &= \mathcal{E}_0^2 \exp(i\omega_0 \tau - \Gamma|\tau|) \end{aligned}$$

Spectre de puissance

Le théorème de Wiener-Khintchine permet de déduire de la fonction d'autocorrélation le spectre émis par le nuage atomique :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int d\tau\,\kappa(\tau)e^{i\omega\tau} \\ &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{\pi}\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2} \end{aligned}$$

et on en déduit la forme de l'intensité lumineuse :

$$\boxed{I(\omega) = \frac{I_0}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2}}$$