Rayonnement du corps noir

1 Ensemble grand canonique

Considérons un système 1 en contact avec un réservoir 2 d'énergie et de particules. On note E l'énergie totale de l'ensemble et N le nombre total de particules. La probabilité de trouver le système dans un micro état donné avec une énergie E_1 et un nombre de particules N_1 est exprimée par

$$\frac{W_2(E-E_1,N-N_1)}{\sum\limits_{N_1',E_1'} W_1\left(E_1',N_1'\right)W_2\left(E-E_1',N-N_1'\right)}$$

où $W_i\left(E,N\right)$ est le nombre de microétats du système i présentant un nombre de particules N et une énergie E.
Le nombre de microétats $W_2\left(E-E_1,N-N_1\right)$ est donné par

$$S_2 = k_b ln W_2 \Leftrightarrow W_2\left(E-E_1,N-N_1\right) = e^{\frac{S_2(E-E_1,N-N_1)}{k_b}}$$

En considérant le développement $S_2\left(E-E_1,N-N_1\right) = S_2\left(E,N\right) - E_1 \left.\frac{\partial S_2}{\partial E_2}\right)_{E_2=E,N_2=N} - N_1 \left.\frac{\partial S_2}{\partial N_2}\right)_{E_2=E,N_2=N}$, on est amené à noter

$$\frac{\partial S_2}{\partial E_2} = \frac{1}{T_2} \qquad\qquad \frac{\partial S_2}{\partial N_2} = -\frac{\mu_2}{T_2}$$

La probabilité p_n d'obtenir le système 1 dans un micro état donné est alors exprimée par

$$p_n = \frac{1}{Z_G} e^{\left(-\frac{E_1}{k_b T} + \frac{\mu N_1}{k_b T}\right)}$$

La fonction de partition grand canonique est donc donnée par

$$Z_G = \sum_{n\in\Omega} e^{-\beta E_1^{(n)} + \beta\mu N_1^{(n)}} = \sum_{N\in\mathbb{N}} e^{\beta\mu N} Z_N(\beta),$$

avec $Z_N(\beta) = \sum\limits_{n\in\Omega_N} e^{-\beta E^{(n)}}$, où Ω_N est l'ensemble des états à N particules.
On peut déduire de la fonction de partition l'expression des grandeurs caractéristiques du système :

$$\langle N\rangle = \frac{\partial ln Z_G}{\partial \beta\mu} \qquad\qquad U = -\frac{\partial ln Z_G}{\partial \beta}$$

2 Distribution de Fermi Dirac

Considérons un état quantifié en niveaux d'énergies $\{E_k\}$, chaque niveau étant occupé par un nombre de particules n_k.
Plutôt que de considérer un état avec un nombre de particules N_0 fixé, on préfère se placer en description grand canonique, quitte à introduire un potentiel chimique μ dont on ajustera la valeur pour avoir $\langle N\rangle = N_0$.
La fonction de partition grand canonique de l'ensemble est donnée par $Z_G = \sum\limits_{n\in\Omega} e^{-\beta E^{(n)} + \beta\mu N^{(n)}}$. Or chaque état n est obtenu en décrivant la population de chaque niveau.
Pour les fermions $n_k \in \{0,1\}$, et on a donc

$$Z_G = \sum_{n_0\in\{0,1\}} \sum_{n_1\in\{0,1\}} ... \sum_{n_k\in\{0,1\}} e^{-\beta(E_0 n_0 + E_1 n_1 + ... + E_k n_k) + \beta\mu(n_0+n_1+...+n_k)}$$

$$= \left[\sum_{n_0\in\{0,1\}} e^{(-\beta E_0+\beta\mu)n_0}\right]\left[\sum_{n_1\in\{0,1\}} e^{(-\beta E_1+\beta\mu)n_1}\right]\dots\left[\sum_{n_k\in\{0,1\}} e^{(-\beta E_k+\beta\mu)n_k}\right]$$

$$= \left[1+e^{-\beta E_0+\beta\mu}\right]\left[1+e^{-\beta E_1+\beta\mu}\right]\dots\left[1+e^{-\beta E_k+\beta\mu}\right]$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{N}}\left(1+e^{-\beta(E_k-\mu)}\right)$$

Or le nombre moyen de particules dans le niveau k étant donné par $\langle n_k\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial ln Z_G}{\partial\epsilon_k}$, on trouve

$$\boxed{f_k^F = \langle n_k\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k-\mu)}+1}}$$

Pour les bosons $n_k \in \mathbb{N}$, et on a donc

$$Z_G = \sum_{n_0\in\mathbb{N}}\sum_{n_1\in\mathbb{N}}\dots\sum_{n_k\in\mathbb{N}} e^{-\beta(E_0n_0+E_1n_1+\dots+E_kn_k)+\beta\mu(n_0+n_1+\dots+n_k)}$$

$$= \left[\sum_{n_0\in\mathbb{N}} e^{(-\beta E_0+\beta\mu)n_0}\right]\left[\sum_{n_1\in\mathbb{N}} e^{(-\beta E_1+\beta\mu)n_1}\right]\dots\left[\sum_{n_k\in\mathbb{N}} e^{(-\beta E_k+\beta\mu)n_k}\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\beta E_0+\beta\mu}}\frac{1}{1-e^{-\beta E_1+\beta\mu}}\dots\frac{1}{1-e^{-\beta E_k+\beta\mu}}$$

$$= \prod_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{1-e^{-\beta(E_k-\mu)}}$$

Or le nombre moyen de particules dans le niveau k étant donné par $\langle n_k\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial ln Z_G}{\partial\epsilon_k}$, on trouve

$$\boxed{f_k^B = \langle n_k\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k-\mu)}-1}}$$

3 Gaz libre de photons

Considérons un grand nombre de photons dans une boite de dimension $L_xL_yL_z$ et des conditions aux bords périodiques.

En assimilant le champ à M oscillateurs harmoniques, on sait que ses niveaux d'énergie se mettent sous la forme $E = E_0 + \sum_{k=1}^{M}\hbar\omega_k n_k$.

Facteur d'occupation

On considère que le potentiel chimique est nul, ce qui permet d'exprimer la distribution de particules sous la forme :

$$\bar{n}\left(\omega_k\right) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1}.$$

Densité d'états

La densité d'état est fixée par le volume $\frac{(2\pi)^3}{V}$ occupé dans l'espace des phases un vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z}\right)$, qui fixe la densité $D(k) = \frac{V}{(2\pi)^3}$. La relation $D(E)dE = D(\overrightarrow{k})d\overrightarrow{k} = D(k)4\pi k^2dk$ permet d'obtenir l'expression $D(E) = \frac{V}{2\pi^2}k^2\frac{dk}{dE}$, avec $E = \hbar ck$. On en déduit l'expression :

$$D\left(E\right) = \frac{V}{2\pi^2}\frac{E^2}{\hbar^2c^2}\frac{1}{\hbar c} = \frac{8\pi}{c^3h^3}VE^2.$$

En traduisant cette relation sur la densité de fréquence par $D(E)dE = D(\nu)d\nu$ et $E = h\nu$, on obtient

$$D\left(\nu\right) = \frac{8\pi}{c^3}V\nu^2.$$

Spectre du corps noir

On est à présent en mesure de déterminer le spectre du corps noir, c'est à dire la quantité volumique d'énergie interne du système pour une fréquence donnée.

En définissant $u(\nu) = \frac{1}{V}h\nu D(\nu)\bar{n}(\nu)$, on trouve en effet :

$$\boxed{u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1}}$$