

Résumé de phystat

March 13, 2015

1 Ensembles thermodynamiques

Démonstrations

- Facteur d'occupation

$$\begin{aligned} n_{\bar{\lambda}_0} &= \sum_{\{n_\lambda\}} n_{\lambda_0} P(\{n_\lambda\}) \\ &= \frac{1}{\Xi} \sum_{\{n_\lambda\}} n_{\lambda_0} \exp(-\beta (E_{\{n_\lambda\}} - N_{\{n_\lambda\}} \mu)) \\ &= \frac{1}{\xi_0} \left(\sum_{n_{\lambda_0}} n_{\lambda_0} \exp(-\beta n_{\lambda_0} (E_0 - \mu)) \right) \times \frac{1}{\xi_1} \left(\sum_{n_{\lambda_1}} \exp(-\beta n_{\lambda_1} (E_1 - \mu)) \right) \times \dots \\ &= \frac{1}{\xi_0} \left(\sum_{n_{\lambda_0}} n_{\lambda_0} \exp(-\beta n_{\lambda_0} (E_0 - \mu)) \right) \times 1 \times \dots \\ &= \frac{1}{\xi_0} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \xi_0 \end{aligned}$$

- Limite classique pour des particules indiscernables

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int \prod_{i=1}^N dq_i dp_i e^{-\beta H(\{q_i, p_i\})} \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \prod_{i=1}^N \int dp_i e^{-\beta \frac{p_i^2}{2m}} \int dq_i e^{-\beta U(\{q_i\})} \\ &= \frac{1}{N! \Lambda^{3N}} \prod_{i=1}^N \int dq_i e^{-\beta U(\{q_i\})} \\ &= \frac{V_e^N}{N! \Lambda^{3N}} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \Lambda^{-3} = \left(\frac{\sqrt{2\pi m k_B T}}{h} \right)^3, V_e = \begin{cases} V & \text{pour } U = 0 \\ \left(\frac{m\omega^2}{k_B T} \right)^{3/2} & \text{pour } U = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \end{cases}$$

Quantités fixées	N, E	N, T	μ, T
Probabilité d'un micro état	$p = \begin{cases} 1/W(E) & \text{si l'énergie du microétat est } E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$p = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E)$	$p = \frac{1}{\Xi} \exp(-\beta E_N + \beta \mu N)$
Fonction de partition		$Z = \sum_E \exp(-\beta E) = \text{Tr}(e^{-\beta H})$	$\Xi = \sum_{E,N} \exp(-\beta E_N + \beta \mu N)$ $= \sum_N \exp(\beta \mu N) Z_N(N)$
Potentiel thermo	$S = k_B \log W$	$F = -k_B T \log Z$	$A = -k_B T \log \Xi = -pV$
Identité thermo	$TdS = dU - \mu dN + \dots$	$dF = -SdT + \mu dN + \langle M \rangle dB \dots$	$dA = -SdT - Nd\mu + \dots$
Relations utiles		$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$	$\langle N_\lambda \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \xi_\lambda$
		$\Delta E^2 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z = k_B T^2 C$	$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi$
		avec $C = \partial_T E$	$\Delta N^2 = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log \Xi$

2 Distribution des gaz parfaits

2.1 Gaz classique : distribution de Maxwell-Boltzmann

On se place dans l'ensemble canonique et on considère N particules libres classiques discernables à une température T .

La probabilité pour le système d'être dans un état \mathcal{E}_i^E donné d'énergie E est

$$p(\mathcal{E}_i) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E)$$

En notant $g(E)$ le nombre d'états $\mathcal{E}_i^E, \mathcal{E}_j^E$ d'énergie E , on peut exprimer la probabilité pour le système d'avoir l'énergie E :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(\mathcal{E}_i) + p(\mathcal{E}_j) + \dots = \frac{1}{Z} g(E) \exp(-\beta E) \\ Z &= \sum_i \exp(-\beta E \mathcal{E}_i) = \sum_{E'} g(E') \exp(-\beta E') \end{aligned}$$

Dans l'ensemble grand canonique,

La probabilité de trouver une particule dans un niveau d'énergie E_i est donnée par

$$f_{MB}(E) = \langle n(E) \rangle = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right)}$$

où g_i est la dégénérescence des niveaux d'énergie E_i .

2.2 Gaz de fermions : distribution de Fermi-Dirac

On considère un gaz de fermions indiscernables décrits dans l'ensemble grand canonique par une température T et un potentiel chimique μ .

Considérons un niveau d'énergie E_i et notons n_i le nombre de particules peuplant ce niveau. Le principe d'exclusion de Pauli impose $n_i = 0$ ou $n_i = 1$. On a donc

$$\xi_\lambda = \sum_{n_i} \exp(-\beta n_i (E_i - \mu)) = 1 + \exp(-\beta (E_i - \mu))$$

Le taux d'occupation est alors donné par

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= \frac{1}{\beta} \partial_\mu (\log \xi_i) \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\beta \exp(-\beta (E_i - \mu))}{1 + \exp\left(-\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right)} \\ &= \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) + 1} \end{aligned}$$

(ou de manière équivalente, $\langle n_i \rangle = \frac{1}{\xi_i} \left(0 \times 1 + 1 \times \exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right)\right)$)

On définit la distribution de Fermi Dirac comme le nombre moyen de fermions d'énergie E :

$$f_{FD}(E) = \langle n_f(E) \rangle = \frac{g(E)}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) + 1}$$

où $g(E)$ est la dégénérescence des niveaux d'énergie E .

2.3 Gaz de bosons : distribution de Bose-Einstein

On considère un gaz de bosons indiscernables décrits dans l'ensemble grand canonique par une température T et un potentiel chimique μ .

Considérons un niveau d'énergie E_i et notons n_i le nombre de particules peuplant ce niveau. Ce niveau peut être peuplé de 0 à une infinité de particules. On a donc

$$\begin{aligned}\xi_\lambda &= \sum_{n_i=0}^{+\infty} \exp(-\beta n_i (E_i - \mu)) \\ &= \sum_{n_i} \exp(-\beta (E_i - \mu)^{n_i}) \\ &= \frac{1}{1 - \exp(-\beta (E_i - \mu))}\end{aligned}$$

à condition que $E < \mu$, auquel cas $\exp(-\beta n_i (E_i - \mu)) < 1$ et la série converge bien. Le taux d'occupation est alors donné par

$$\begin{aligned}\langle n_i \rangle &= \frac{1}{\beta} \partial_\mu (\log \xi_i) \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{-\beta \exp(-\beta (E_i - \mu))}{1 - \exp(-\beta (E_i - \mu))} \\ &= \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) - 1}\end{aligned}$$

On définit la distribution de Bose Einstein comme le nombre moyen de bosons d'énergie E :

$$f_{BE}(E) = \langle n_b(E) \rangle = \frac{g(E)}{\exp\left(\frac{E_i - \mu}{k_B T}\right) - 1}, \quad E < \mu$$

où $g(E)$ est la dégénérescence des niveaux d'énergie E .

3 Passage au continu : densité d'états

Les distributions obtenues précédemment décrivent la probabilité de trouver le système dans une quelconque configuration d'énergie E donnée.

Dans le cas général, les niveaux d'énergie du système sont continus. Le nombre d'états d'énergie E est alors donné non pas par la dégénérescence $g(E)$ mais par la densité d'état $\rho(E)$.

3.1 Première approche

Idée générale On part de la quantification de \vec{k} pour exprimer la densité d'états $\rho(\vec{k})$. On passe aux autres densités par la relation $\rho(\vec{k}) d^n k = \rho(\text{machin}) d\text{machin}$. On travaille pour écrire $d\text{machin}$ en fonction de $d^n k$ et de la quantité machin.

Quantification des états Montrer que $\rho(\vec{k}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$

Pour pouvoir compter le nombre d'état entre E et $E + dE$, il faut que les états d'énergie soient discrets. On commence par montrer que les états sont discrets, on peut les relier ensuite à l'énergie.

On note $\left\{ \left| \vec{k} \right\rangle \right\}$ les vecteurs propres de l'opérateur impulsion \hat{p} :

$$\hat{p} \left| \vec{k} \right\rangle = \hbar \vec{k} \left| \vec{k} \right\rangle$$

L'opérateur impulsion étant hermitien, ses vecteurs propres forment une base de l'espace de Hilbert associé au problème (bien qu'ils ne soient pas nécessairement vecteurs propres du hamiltonien).

En projetant dans l'espace des positions, on obtient la relation

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | \hat{p} | \vec{k} \rangle &= \hbar \vec{k} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \\ \Rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \hbar \vec{k} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \\ \Rightarrow \partial_{x_i} \psi_{\vec{k}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= ik_i \psi_{\vec{k}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= \psi_{\vec{k}}^0 \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

La constante d'intégration est fixée par la condition de normalisation : $\langle \vec{k} | \vec{k} \rangle = \int d^3 \vec{r} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \psi_{\vec{k}}^*(\vec{r}) = 1 \Leftrightarrow \psi_{\vec{k}}^0 = 1/\sqrt{L^3}$

Par ailleurs, les conditions périodiques au bord de la fonction d'onde imposent

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k}}(\vec{r} + L\vec{u}_x) &= \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \\ \Rightarrow \exp(ik_x L) &= 1 \\ \Rightarrow k_x &= n_x \frac{2\pi}{L} \end{aligned}$$

et idem suivant les deux autres directions de l'espace. On trouve ainsi la condition

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

et par conséquent, dans un volume $d^3 \vec{k}$ de l'espace des phases, on trouve un nombre d'état

$$\begin{aligned} dn &= \rho(\vec{k}) d^3 \vec{k} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3 \vec{k} \\ \Rightarrow \rho(\vec{k}) &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \end{aligned}$$

Quantification de l'énergie

On relie l'impulsion à l'énergie :

- Pour une particule libre massive non relativiste $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \rightarrow \begin{cases} dE = \frac{\hbar^2}{m} k dk \\ k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \end{cases}$
- Pour une particule libre massive relativiste $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \rightarrow \begin{cases} E dE = c^2 p dp \\ p = \sqrt{E^2/c^2 - m^2 c^2} \end{cases} \Rightarrow dE = c^2 \frac{p}{E} dp$
- Pour un photon $E = \hbar kc \rightarrow \begin{cases} dE = \hbar c dk \\ k = \frac{E}{\hbar c} \end{cases}$

Et on obtient alors

$$\rho(E) = \rho(\vec{k}) \frac{d^3 k}{dE}$$

3.2 Seconde approche

Pour trouver la densité d'état d'énergie donnée, on compte combien d'états ont cette énergie. On considère donc toutes les configurations (on intègre sur tout l'espace des phases) et on ne garde que les configurations qui ont l'énergie E .

Application pour des particules massives non relativistes :

$$\rho(E) = \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - U(r)\right)$$

On note $d^3p = dp_x dp_y dp_z$ et on peut intégrer sur θ et φ :

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p^2 dp \delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - U(r)\right) \\ &\text{Astuce : } p^2 dp = mp d\left(\frac{p^2}{2m}\right) \\ &= \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \int d\left(\frac{p^2}{2m}\right) p \delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - U(r)\right) \\ &= \frac{4\pi m}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \int d\alpha \sqrt{2m\alpha} \delta(E - U(r) - \alpha) \\ &= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3r \sqrt{E - U(r)} \\ &\propto \begin{cases} \sqrt{E} & \text{si } U(r) = U_0 \theta(r) \theta(r_0 - r) \\ E^{7/2} & \text{si } U(r) = \alpha r \\ E^2 & \text{si } U(r) = \beta r^2 \end{cases} \end{aligned}$$

3.3 Sumup

		3D libre	2D libre	1D libre	Photon
$\rho(\vec{k})$		$1 / \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$	$1 / \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$	$1 / \left(\frac{2\pi}{L}\right)$	$1 / \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$
$d^n k$		$4\pi k^2 dk$	$2\pi k dk$	dk	$4\pi k^2 dk$
$d^n p$		$4\pi p^2 dp = \hbar^3 d^3 k$	$2\pi p dp = \hbar^2 d^2 k$	$dp = \hbar dk$	$4\pi p^2 dp = \hbar^3 d^3 k$
$\rho(\vec{p})$	$= \rho(\vec{k}) \frac{d^n k}{d^n p}$	$1 / \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3$	$1 / \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2$	$1 / \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)$	$1 / \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3$
$d^n v$		$4\pi v^2 dv = \frac{\hbar^3}{m^3} d^3 k$	$2\pi v dv = \frac{\hbar^2}{m^2} d^2 k$	$dv = \frac{\hbar}{m} dk$	-
$\rho(\vec{v})$	$= \rho(\vec{k}) \frac{d^n k}{d^n v}$	$1 / \left(\frac{2\pi\hbar}{mL}\right)^3$	$1 / \left(\frac{2\pi\hbar}{mL}\right)^2$	$1 / \left(\frac{2\pi\hbar}{mL}\right)$	-
dE		$\frac{\hbar^2}{m} \frac{4\pi k}{4\pi k} k dk = \frac{\hbar^3}{m} \frac{1}{4\pi\sqrt{2mE}} d^3 k$	$\frac{\hbar^2}{m} \frac{2\pi}{2\pi} k dk = \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{2\pi} d^2 k$	$\frac{\hbar^2}{m} k dk = \frac{\hbar}{m} \sqrt{2mE} dk$	$dE = \hbar c dk$
$\rho(E)$	$= \rho(\vec{k}) \frac{d^n k}{dE}$	$4\pi \sqrt{2m^3 E} / \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3$	$2m\pi / \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2$	$\sqrt{m} / \left(\sqrt{2E} \frac{2\pi\hbar}{L}\right)$	$4\pi E^2 / \left(\frac{2\pi\hbar c}{L}\right)^3$

4 Gaz parfaits libres

4.1 Gaz parfait classique libre

En passant au continu, on ne considère non plus la probabilité $p(E)$ de trouver le système avec une énergie E donnée, mais la probabilité $f(E)dE$ de trouver le système avec une énergie comprise entre E et $E + dE$

$$\begin{aligned} Z &= \int dE \rho(E) e^{-\beta E} \\ f(E)dE &= \frac{1}{Z} \rho(E) dE \exp(-\beta E) \end{aligned}$$

On peut réécrire le résultat en termes de vitesse :

$$\begin{aligned} f(\vec{v})d^3v &= \alpha' \rho(\vec{v})d^3v \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}\right) \\ f(\vec{v}) &= \alpha' \left(\frac{mL}{2\pi\hbar}\right)^3 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}\right) \end{aligned}$$

La constante α' est fixée par la normalisation $\int f(\vec{v})d^3v = 1$ avec $4\pi \int v^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{k_B T}\right) dv = \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{3/2}$, on trouve

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{k_B T}\right)$$

et avec $f(v) = \int d^2\Omega v^2 f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{k_B T}\right)$, on peut exprimer les résultats suivants :

- La probabilité maximale est obtenue pour $v_0 = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$
 - La vitesse moyenne $\int v f(v)dv$ vaut $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$
 - La vitesse quadratique moyenne $\sqrt{\int v^2 f(v)dv}$ vaut $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

4.2 Gaz de Fermions

Fermions libres à $T = 0$

A température nulle, la distribution de Fermi Dirac est une marche :

$$f_{FD}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E < \mu \\ 0 & \text{si } E > \mu \end{cases}$$

Potentiel chimique et nombre de particules

La somme des occupations de tous les niveaux donne le nombre total de particules :

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{+\infty} dE \rho(E) f_{FD}(E) \\ &= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2m}L}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_0^\mu dE \sqrt{E} \\ \frac{N}{L^3} &= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2m}}{2\pi\hbar}\right)^3 \mu^{3/2} \end{aligned}$$

et on trouve ainsi

$$\mu(T = 0) \equiv E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$$

Energie totale

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \int_0^{+\infty} dE E \rho(E) f_{FD}(E) \\ &= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2m}L}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_0^{E_F} dE E^{3/2} \\ &= \frac{2}{3} \frac{3}{5} 2\pi \left(\frac{\sqrt{2m}L}{2\pi\hbar}\right)^3 E_F^{5/2} \end{aligned}$$

et on trouve ainsi

$$E_{tot} = \frac{3}{5} N E_F \propto N^{5/3}$$

Pression

$$p = \frac{2}{5}NE_F$$

Fermions libres à $T \neq 0$

On définit la fugacité $z = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)$.

Densité

En intégrant la distribution sur toutes les impulsions, on obtient

$$\begin{aligned} n(\vec{r}) &= \int d^3p \rho(\vec{p}) \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)\right) + 1} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)\right) + 1} \\ &= \frac{1}{\lambda_{dB}^3} f_{3/2}\left(\exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)\right) \end{aligned}$$

$$n = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z)$$

Energie

$$E_{tot} = \frac{3}{2}k_B T \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

et on peut développer le résultat à basse température ($k_B T \ll \mu \Rightarrow z \gg 1$), avec $\mu \simeq E_F$,

$$E_{tot} \simeq \frac{3}{5}NE_F \left(1 + \frac{5}{12}\pi^2 \left(\frac{k_B T}{E_F}\right)^2 + \dots\right)$$

Pression

$$pV = k_B T \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z)$$

Et on a la relation

$$E_{tot} = \frac{3}{2}pV$$

4.3 Gaz de Bosons

5 Gaz parfait dans un piège harmonique 3D

5.1 Gaz de fermions à $T = 0$

On prend $\rho(E) = \alpha E^2$

Densité

En intégrant la distribution sur toutes les impulsions, on obtient

$$\begin{aligned}
n(\vec{r}) &= \int d^3p \rho(\vec{p}) \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu\right)\right) + 1} = \pm \frac{1}{\lambda_{dB}^3} Li_{3/2} \left(\pm \exp\left(\frac{1}{k_B T} (\mu - V(\vec{r}))\right) \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu\right)\right) + 1} \\
&= -\frac{1}{\lambda_{dB}^3} Li_{3/2} \left(-\exp\left(\frac{1}{k_B T} (\mu - V(\vec{r}))\right) \right)
\end{aligned}$$

Potentiel chimique $\mu(T=0) \equiv E_F \propto N^{1/3}$

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^{+\infty} dE \rho(E) f_{FD}(E) \\
&= \alpha \int_0^\mu dE E^2 \\
&= \frac{\alpha}{3} \mu^3
\end{aligned}$$

Energie totale $E_{\text{tot}} = \frac{3}{4} N E_F$

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{+\infty} dE E \rho(E) f_{FD}(E) \\
&= \alpha \int_0^\mu dE E^3 \\
&= \frac{\alpha}{4} \mu^4
\end{aligned}$$

5.2 Gaz de bosons à $T = 0$

6 Rappel sur les fonctions polylog

Définitions

On définit la fonction polylog comme

$$\begin{aligned}
g_n(z) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dq \frac{q^{n-1}}{e^q/z - 1} \\
&= \sum_{k \geq 1} z^k / k^n
\end{aligned}$$

On définit à partir des polylogs

$$f_n(z) = -Li_n(-z)$$

Propriétés

Intégration $\int_{-\infty}^{+\infty} dx g_n(z e^{-x^2}) = \sqrt{\pi} g_{n+1/2}(z)$

Pour z petit $g_n(z) \underset{z \ll 1}{\sim} z$

Pour z grand $f_n(z) \underset{z \gg 1}{\sim} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \log^n(z)$